La conjecture de Manin géométrique pour une famille de quadriques intrinsèques

David Bourqui

LA CONJECTURE DE MANIN GÉOMÉTRIQUE POUR UNE FAMILLE DE QUADRIQUES INTRINSÈQUES

par

David Bourqui

Résumé. — Nous établissons une version de la conjecture de Manin pour une famille de quadriques intrinsèques, le corps de base étant un corps global de caractéristique positive. Nous expliquons également comment une très légère variante de la méthode employée permet d'établir cette même conjecture pour une certaine surface de del Pezzo généralisée.

Abstract. — We prove a version of Manin's conjecture for a certain family of intrinsic quadrics, the base field being a global field of positive characteristic. We also explain how a very slight variation of the method we use allows to establish the conjecture for a certain generalized del Pezzo surface.

Dans ce texte, nous établissons une version de la conjecture de Manin sur le comportement asymptotique du nombre de courbes de degré anticanonique borné pour une certaine famille de quadriques intrinsèques, *i.e.* de variétés dont l'anneau total de coordonnées s'identifie à l'anneau de coordonnées d'une quadrique affine. Cette famille est construite à l'aide des résultats de [**BH07**] qui permettent de bâtir des variétés d'anneaux totaux de coordonnées fixés (on renvoie également à cette référence pour la justification du terme « intrinsèque » ; soulignons qu'une quadrique intrinsèque n'est pas en général isomorphe à une quadrique). Le résultat principal de cet article est le suivant (on se reportera au théorème 3.8 pour un énoncé plus précis).

Théorème 0.1. — *Soit k un corps fini, $\mathscr{C}$ une k-courbe projective et lisse et $(X_n)_{n\geqslant 3}$ la famille de k-variétés définie à la sous-section 3.3. Alors pour tout $n \geqslant 3$ la conjecture de Manin sur le comportement asymptotique du nombre de morphismes de $\mathscr{C}$ vers X_n de degré anticanonique borné vaut pour X_n.*

Il est à noter qu'on a $\dim(X_n) = n - 1$ et que X_3 est isomorphe au plan projectif éclaté en trois points alignés, traité dans un précédent travail (*cf.* [**Bou09**]). Nous

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11G50 14C20 14J45 .

Mots clefs. — conjecture de Manin, fonction zêta des hauteurs, corps global de caractéristique positive, torseurs universels, anneaux de Cox.

expliquons également à la fin de l'article comment une légère variante de la méthode employée permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 0.2. — *On conserve les notations de l'énoncé du théorème précédent. Soit X la désingularisation minimale de la surface de del Pezzo singulière de degré* 6 *avec une singularité de type A_2. Alors la conjecture de Manin sur le comportement asymptotique du nombre de morphismes de $\mathscr{C}$ vers X de degré anticanonique borné vaut pour X.*

Le principe général de la démonstration suit celui de [**Bou09**]. L'idée de départ, dûe à Salberger ([**Sal98**]) et Peyre ([**Pey95**]), consiste à exploiter l'existence d'un certain torseur au-dessus de la variété. Comme expliqué dans [**Bou09**], ceci permet de réécrire la fonction zêta des hauteurs en termes des relations définissant l'anneau de coordonnées total et de séries génératrices indexées par les points entiers du dual du cône effectif. Afin de dégager terme dominant et termes non significatifs de la fonction zêta des hauteurs, il s'agit alors de décomposer les séries obtenues suivant les « bonnes » et « mauvaises » régions du cône effectif dual. Pour faciliter une adaptation future de la méthode employée à d'autres variétés ou familles de variétés, nous commençons par décrire la stratégie suivie pour une famille plus générale que celle pour laquelle le résultat sera finalement démontré, dégageant au passage des hypothèses suffisantes pour que la méthode aboutisse. La classe que nous étudions est consituée des hypersurfaces intrinsèques pour lesquelles la dépendance en les paramètres de l'équation de l'anneau de Cox est linéaire (*cf.* la remarque 1.6, notamment pour le sens de « paramètres »).

Une des améliorations par rapport à [**Bou09**] est que les décompositions liées au cône effectif sont exprimées de manière intrinsèque. En particulier, bien que le cône effectif des variétés considérés dans les énoncés ci-dessus soit simplicial, cette particularité ne joue aucun rôle dans notre démonstration. Par contre, on verra clairement que la position dans le cône effectif des diviseurs des sections globales utilisées pour engendrer l'anneau total de coordonnées a une influence cruciale pour la mise en oeuvre de la méthode. On renvoie à la remarque 2.3 pour quelques commentaires sur la nature des hypothèses mises en jeu.

Pour conclure cette introduction, soulignons que, bien que notre méthode n'utilise absolument pas cette structure, les variétés considérées dans les énoncés ci-dessus sont des compactifications équivariantes de l'espace affine (*cf.* la remarque 3.7). L'analogue de nos résultats pour les corps de nombres découle donc d'un théorème plus général de Chambert-Loir et Tschinkel sur la validité des conjectures de Manin pour les compactifications équivariantes d'espaces affines définies sur un corps de nombres ([**CT02**]). L'adaptation de leur méthode au cas d'un corps global de caractéristique positive est probablement faisable mais reste à mettre en œuvre.

Nous décrivons à présent brièvement l'organisation de l'article. La section 1 contient les rappels utiles. La stratégie générale de démonstration est décrite dans la section 2. Elle est synthétisée par le théorème 2.2. La construction de notre famille de quadriques intrinsèques fait l'objet du début de la section 3 et la vérification des hypothèses ad hoc pour cette famille occupe la fin de cette même section. Enfin la dernière section explique l'adaptation de la méthode permettant d'obtenir le théorème 0.2.

1. Fonction zêta des hauteurs et relèvement au torseur universel

Dans cette section, tout en fixant quelques notations, nous rappelons le contexte de notre étude et le résultat de relèvement de la fonction zêta des hauteurs au torseur universel démontré dans [**Bou09**].

1.1. Fonction zêta des hauteurs et conjecture de Manin géométrique. — Soit k un corps fini de cardinal q. Soit $\mathscr{C}$ une k-courbe projective, lisse et géométriquement intègre, dont on note $g_{\mathscr{C}}$ le genre et $h_{\mathscr{C}}$ le nombre de classes de diviseurs de degré 0. On note $\mathscr{C}^{(0)}$ l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}$. Pour $v \in \mathscr{C}^{(0)}$, on note κ_v le corps résiduel et $q_v = q^{f_v}$ son cardinal. On note $\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})$ le monoïde des diviseurs effectifs de $\mathscr{C}$. Rappelons que si $\mathcal{D}$ est un diviseur de $\mathscr{C}$ la dimension $\ell(\mathcal{D}) \overset{\text{déf}}{=} \dim(H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D})))$ est toujours majorée par $1 + \deg(\mathcal{D})$ et vaut $1 - g_{\mathscr{C}} + \deg(\mathcal{D})$ si on a $\deg(\mathcal{D}) \geqslant 2\, g_{\mathscr{C}} - 1$. En particulier, on a pour tout $d \geqslant 0$ la majoration

$$|\{\mathcal{D} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C}),\, \deg(\mathcal{D}) = d\}| \leqslant \frac{q^{\,1+d}\, h_{\mathscr{C}}}{q-1}. \tag{1.1.1}$$

Soit X une k-variété projective, lisse et géométriquement intègre définie sur k. On suppose que son groupe de Picard géométrique est libre de rang fini et déployé, *i.e.* que l'action du groupe de Galois absolu est triviale. On note $\mathscr{K}_X$ la classe du faisceau canonique de X dans le groupe de Picard. On suppose qu'elle est située à l'intérieur du cône effectif $C_{\mathrm{eff}}(X)$ de X.

Pour U ouvert de Zariski non vide de X assez petit et $n \geqslant 0$, on note $N(X, -\mathscr{K}_X, U, n)$ le nombre de k-morphismes $f : \mathscr{C} \to X$ dont l'image recontre U et de degré anticanonique n. Si U est assez petit, $N(X, -\mathscr{K}_X, U, n)$ est fini pour tout n et on peut définir la fonction zêta des hauteurs anticanonique comme l'élément de $\mathbf{Z}[[t]]$ suivant :

$$Z_{X,-\mathscr{K}_X,U}(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n \geqslant 0} N(X, -\mathscr{K}_X, U, n)\, t^n. \tag{1.1.2}$$

Voici une version de la conjecture de Manin dans ce cadre.

Question 1.1. — *Soit* $\delta \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}\{d \in \mathbf{N}_{>0},\ -\mathscr{K}_X \in d\ \mathrm{Pic}(X)\}$ *et* $\widetilde{Z}_{X,-\mathscr{K}_X,U}(t)$ *la série telle que* $\widetilde{Z}_{X,-\mathscr{K}_X,U}(t^{\delta}) = Z_{X,-\mathscr{K}_X,U}(t)$*. Est-il vrai que si* U *est assez petit la série* $Z_{X,-\mathscr{K}_X,U}(t)$ *a pour rayon de convergence* $q^{-\delta}$ *et que pour un certain* $\varepsilon > 0$ *sa somme se prolonge en une fonction méromorphe sur le disque* $|t| < q^{-\delta+\varepsilon}$ *ayant un pôle d'ordre* $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))$ *en* $t = q^{-\delta}$*, et des pôles d'ordre au plus* $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)) - 1$ *en tout autre point du cercle de rayon* $q^{-\delta}$*, et vérifiant*

$$\lim_{t \to q^{-\delta}} \left(t - q^{-\delta}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}\, \widetilde{Z}_{X,-\mathscr{K}_X,U}(t) = \alpha(X)\, \gamma(X) \tag{1.1.3}$$

où

$$\alpha(X) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t \to 1}\ (1-t)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))} \sum_{y \in C_{\mathrm{eff}}(X)^{\vee} \cap \mathrm{Pic}(X)^{\vee}} t^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{1.1.4}$$

et

$$\gamma(X) \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{h_{\mathscr{C}}\, q^{(1-g_{\mathscr{C}})}}{q-1}\right)^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X))} q^{(1-g_{\mathscr{C}})\dim(X)} \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} (1-q_v^{-1})^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X))} \frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}}. \tag{1.1.5}$$

Définition 1.2. — 1. Soit $(a_n)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(b_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On dit que la série $\sum a_n t^n$ est majorée par la série $\sum b_n\, t^n$ si on a $|a_n|\leqslant b_n$ pour tout n.

2. Soit $(a_n)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, $k\geqslant 1$ un entier et $\rho>0$ un réel. On dit que la série $\sum a_n t^n$ est ρ-contrôlée à l'ordre k si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes (équivalentes d'après les estimées de Cauchy) :
   (a) on a $a_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(n^{k-1}\,\rho^{-n}\right)$;
   (b) la série $\sum a_n\, t^n$ est majorée par une série dont le rayon de convergence est supérieur à ρ et dont la somme se prolonge en une fonction méromorphe sur un disque de rayon strictement supérieur à ρ, ayant des pôles d'ordre au plus k sur le cercle de rayon ρ.

Lemme 1.3. — *On conserve les hypothèses et notations précédentes. Si U est un ouvert de X tel que la série*

$$Z_{X,-\mathscr{K}_X,U}(t) - \gamma(X) \sum_{y\in C_{\text{eff}}(X)^\vee\cap\operatorname{Pic}(X)^\vee} (q\,t)^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{1.1.6}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X))-1$*, alors la réponse à la question 1.1 est positive pour U.*

1.2. Anneau de Cox, inversion de Möbius, et relèvement au torseur universel. — On conserve les notations et hypothèses de la section précédente. On suppose en outre que l'anneau total de coordonnées (ou anneau de Cox) de X (*cf. e.g.* [**Has04**]), noté $\operatorname{Cox}(X)$, est de type fini. Soit $\{u_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ une famille finie de sections globales (non constantes) qui engendre $\operatorname{Cox}(X)$. Soit $\mathscr{I}_X$ l'idéal $\operatorname{Pic}(X)$-homogène noyau du morphisme naturel $k[u_i]_{i\in\mathfrak{I}}\to\operatorname{Cox}(X)$ et $\mathscr{I}_X^{\text{hom}}$ l'ensemble de ses éléments homogènes. Pour $i\in\mathfrak{I}$, on note $\mathscr{E}_i$ le diviseur des zéros de u_i. Soit X_0 l'ouvert de X égal au complémentaire de la réunion des diviseurs $\{\mathscr{E}_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$.

Soit $T_{\text{NS}}(X) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Hom}(\operatorname{Pic}(X),\mathbf{G}_m)$ le tore de Néron-Severi. Soit $\hat{X}$ l'ouvert de $\operatorname{Spec}(\operatorname{Cox}(X))$ formé des points semi-stables vis-à-vis de la $T_{\text{NS}}(X)$-linéarisation sur le fibré trivial de $\operatorname{Spec}(\operatorname{Cox}(X))$ induite par le choix d'une classe ample. Le quotient géométrique de $\hat{X}$ par $T_{\text{NS}}(X)$ existe et s'identifie naturellement à X. On montre en outre que $\hat{X}\to X$ représente l'unique classe de torseurs universels au-dessus de X (*cf.* [**Has04, HK00**]).

Une classe $\mathfrak{C}$ de parties de $\mathfrak{I}$ sera dite *admissible* si on a

$$\hat{X} = \operatorname{Spec}(\operatorname{Cox}(X)) \cap \left(\underset{\mathfrak{J}\in\mathfrak{C}}{\cup} \prod_{i\in\mathfrak{J}} u_i \neq 0\right). \tag{1.2.1}$$

Par exemple, soit $\mathscr{D} \in \mathrm{Pic}(X)$ une classe ample et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des parties $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{I}$ telles qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ de rationnels strictement positifs vérifiant $\mathscr{D} = \sum\limits_{i\in\mathfrak{J}} \lambda_i\, \mathscr{E}_i$. Alors $\mathfrak{C}$ est admissible.

Remarque 1.4. — Pour tout $i \in \mathfrak{I}$, l'image réciproque du diviseur $\mathscr{E}_i$ par le morphisme quotient $\hat{X} \to X$ est $\hat{X} \cap \{u_i = 0\}$. On en déduit que si une partie $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{I}$ vérifie $\cap_{i\in\mathfrak{J}} \mathscr{E}_i \neq \varnothing$, toute classe admissible contient une partie $\mathfrak{K}$ telle que $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{J} = \varnothing$. On en déduit même que la classe

$$\mathfrak{C}_{\mathrm{inc}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}, \quad \bigcap_{i\notin\mathfrak{J}} \mathcal{E}_i \neq \varnothing\} \tag{1.2.2}$$

est admissible.

On a la généralisation classique suivante de la formule d'inversion de Möbius

Proposition 1.5. — *Il existe une unique fonction $\mu_X : \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}} \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant*

$$\forall\, \boldsymbol{\mathcal{D}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{\mathfrak{I}}, \qquad \sum_{0\leqslant \boldsymbol{\mathcal{E}} \leqslant \boldsymbol{\mathcal{D}}} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = \begin{cases} 1 & si \ \operatorname*{Inf}\limits_{\mathfrak{J}\in\mathfrak{C}_{inc}} \left(\sum_{i\in\mathfrak{J}} \mathcal{D}_i\right) = 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Cette fonction vérifie en outre les propriétés suivantes :

1. *elle est multiplicative, c'est-à-dire que si $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ vérifient*

$$\forall i \in \mathfrak{I}, \quad \mathrm{Inf}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}'_i) = 0 \tag{1.2.4}$$

alors on a

$$\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}') = \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})\, \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}') \quad ; \tag{1.2.5}$$

2. *pour tout $v \in \mathscr{C}^{(0)}$ et tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}^{\mathfrak{I}}$, $\mu_X(\,(\alpha_i\, v)\,)$ ne dépend que de $\boldsymbol{\alpha}$; on note $\mu^0_X(\boldsymbol{\alpha})$ cette valeur. Pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}^{\mathfrak{I}}$, on a*

$$\sum_{0\leqslant\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} \mu^0_X(\boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} 1 & si \ \bigcap\limits_{i,\ \alpha_i\neq 0} \mathscr{E}_i \neq \varnothing \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

En particulier, on a $\mu^0_X(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ dans les cas suivants :

   (a) *il existe $i \in \mathfrak{I}$ tel que $\alpha_i \geqslant 2$;*

   (b) *$\boldsymbol{\alpha}$ est non nul et l'intersection $\cap_{i,\ \alpha_i\neq 0} \mathscr{E}_i$ est non vide ; ceci vaut en particulier si on a $\sum_{i\in\mathfrak{I}} \alpha_i = 1$.*

On écrit à présent $\mathfrak{I} = I \sqcup J$, où I est tel que les classes $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ forment une base de $\mathrm{Pic}(X)$. Pour $i \in I$ (respectivement $j \in J$), on notera $u_i = s_i$ (respectivement $u_j = t_j$) et $\mathscr{E}_i = \mathscr{F}_i$ (respectivement $\mathscr{E}_j = \mathscr{G}_j$). La notation $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$ désignera toujours un couple $(\boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{\mathcal{G}})$ où $\boldsymbol{\mathcal{F}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I}$ et $\boldsymbol{\mathcal{G}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{J}$. Écrivons, pour $j \in J$,

$$\mathscr{G}_j = \sum_{i\in I} a_{i,j}\, \mathscr{F}_i, \quad a_{i,j} \in \mathbf{Z}. \tag{1.2.7}$$

Pour $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})$, on note $s_{\mathcal{D}}$ la section canonique de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{D})$. Pour $\boldsymbol{\mathcal{D}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$, on désigne par $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}})$ le cardinal de l'ensemble des éléments $(t_j)_{j\in J}$ *tous non nuls* du produit

$$\prod_{j\in J} H^0(\mathscr{C},\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(-\mathcal{G}_j+\sum_j a_{i,j}\,(\mathcal{D}_j+\mathcal{F}_i))) \tag{1.2.8}$$

vérifiant les relations

$$\forall F\in \mathscr{I}_X^{\mathrm{hom}},\quad F(s_{\mathcal{D}_i}\,s_{\mathcal{F}_i},\,t_j\,s_{\mathcal{G}_j})=0. \tag{1.2.9}$$

Des résultats des sections 1.3, 1.4 et 1.6 de [**Bou09**] découle alors la formule suivante, que l'on peut voir comme une formule de relèvement de la fonction zêta des hauteurs au torseur universel :

$$Z_{X,-\mathscr{K}_X,X_0}(t)=\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})\sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant\deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J\\ \langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I\\ \boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\\ \deg(\mathcal{D}_i)=\langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}}\mathcal{N}(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}})\;t^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle}. \tag{1.2.10}$$

Remarque 1.6. — Du point de vue du comptage, le choix de la décomposition $\mathfrak{I}=I\sqcup J$ revient grosso modo à fixer les variables $\{s_j\}_{i\in I}$, les variables $\{t_j\}_{j\in J}$ devenant des paramètres. La situation que nous allons considérer ci-dessous est celle où l'anneau de Cox n'a qu'une relation qui dépend en outre linéairement de ces paramètres ; en un sens, il s'agit donc de la situation la plus simple après celle des variétés toriques (où il n'y a pas de relations, l'anneau de Cox étant polynomial).

2. Le cas de certaines hypersurfaces intrinsèques

On reprend les hypothèses et notations de la section précédente. On suppose en outre qu'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Cox}(X)\xrightarrow{\sim} k[(s_i)_{i\in I},(t_j)_{j\in J}]/F(s_i,t_j). \tag{2.0.11}$$

où F est $\mathrm{Pic}(X)$-homogène de degré $\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}$ et est *linéaire en les* t_j, i.e. s'écrit

$$F=\sum_{j\in J}t_j\prod_{i\in I}s_i^{b_{i,j}},\quad b_{i,j}\in\mathbf{N}. \tag{2.0.12}$$

D'après [**BH07**, proposition 8.5], on a la formule d'adjonction suivante.

Lemme 2.1. — *La classe du fibré anticanonique est*

$$-\mathscr{K}_X=\sum_{i\in I}\mathscr{F}_i+\sum_{j\in J}\mathscr{G}_j-\mathscr{D}_{tot}. \tag{2.0.13}$$

Dans cette section nous décrivons le schéma d'une stratégie pour établir que dans ce cas la question 1.1 a une réponse positive pour $U=X_0$. Plus précisons nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2.2. — *On conserve les notations et hypothèses précédentes.*

On suppose que les hypothèses 2.18, 2.21, 2.26 et 2.30 décrites ci-dessous sont satisfaites.

Alors la série

$$Z_{X,-\mathscr{K}_X,X_0}(t) - \gamma(X) \sum_{y \in C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \cap \mathrm{Pic}(X)^\vee} (q\,t)^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.0.14}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)) - 1$,

La démonstration de ce théorème occupe le reste de cette section.

Remarque 2.3. — Les hypothèses que l'on va dégager sont de deux natures différentes : d'une part, on demande que les diviseurs des zéros des sections t_j soient « suffisamment positifs » ; d'autres part, qu'une certaine série génératrice de nature combinatoire naturellement associée à la relation définissant l'anneau de Cox ait de bonnes propriétés analytiques, et que son « terme dominant » soit relié au nombre de points de X.

Les surfaces de del Pezzo généralisées qui sont des hypersurfaces intrinsèques ont été classifiées par Derenthal dans [**Der06**]. Un certain nombre d'entre elles sont de la forme considérée ici. Il apparaît malheureusement que parmi ces dernières la seule qui satisfasse nos hypothèses de positivité est le plan projectif éclaté en trois points alignés. La fin de cette article explique cependant comment une légère variante de la méthode décrite dans cette section s'applique à un autre membre de la liste de Derenthal, pour lequel la dépendance en les paramètres $\{t_j\}_{j\in J}$ est « presque »linéaire. Au prix d'un certain nombre de complications techniques, la démarche devrait s'avérer fructueuse pour deux autres membres de la liste. C'est l'objet d'un travail en cours.

Vis-à-vis de la méthode décrite ci-dessous, le fait que les hypothèses de positivité ne sont pas satisfaites signifie que l'on englobe dans le terme d'erreur des termes correspondant à des régions trop importantes du cône effectif dual, dont on ne peut en fait plus garantir qu'ils ne contribuent pas au terme principal de la fonction zêta des hauteurs. Un relâchement des hypothèses de positivité devrait passer par une amélioration significative du lemme de comptage 2.6. Il serait sans doute intéressant à cet égard de pouvoir étendre la validité de la méthode au cas de la désingularisation minimale de la surface de del Pezzo singulière de degré 5 avec singularité de type A_1. Pour cette quadrique intrinsèque, l'équation de l'anneau de Cox est très similaire au cas du plan projectif éclaté en trois points alignés, mais la configuration du cône effectif est radicalement différente. Il est à noter que pour cet exemple (comme pour d'autres) nous avons pu vérifier que les hypothèses du second type étaient satisfaites (*cf.* la remarque 2.23). Il serait intéressant de dégager une démonstration conceptuelle de ce genre de résultat, notamment en ce qui concerne la vérification de l'hypothèse 2.21.

2.1. Quelques lemmes préliminaires. —

Lemme 2.4. — *Soit $n \geqslant 1$ un entier, et $\rho > 0$ un réel. Soit $(a_{\boldsymbol{d}}) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^n}$ et*

$$F(\boldsymbol{t}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n} a_{\boldsymbol{d}} \prod_{1\leqslant i\leqslant n} t_i^{d_i}. \tag{2.1.1}$$

On suppose que $F(\boldsymbol{t})$ converge absolument sur un polydisque de rayon $(r,\dots,r)$ avec $r > \rho^{-1}$. Soit $(b_{\boldsymbol{d}}) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^n}$ définie par

$$\frac{F(\boldsymbol{t})}{(1-\rho\, t_1)\dots(1-\rho\, t_n)} = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n} b_{\boldsymbol{d}}\, t_1^{d_1}\dots t_n^{d_n}. \tag{2.1.2}$$

Alors on a pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit

$$\forall \boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n, \quad \left| b_{\boldsymbol{d}} - F(\rho^{-1},\dots,\rho^{-1})\,\rho^{|\boldsymbol{d}|}\right| \leqslant \frac{\rho^{-\varepsilon}\ ||F||_{\rho^{-1+\varepsilon}}}{(1-\rho^{-\varepsilon})^n} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \rho^{(1-\varepsilon)d_i+\sum_{j\neq i} d_j} \tag{2.1.3}$$

où $||F||_\eta \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Max}_{|t_i|=\eta} |F(\boldsymbol{t})|$.

Démonstration. — D'après les estimations de Cauchy, on a pour $\varepsilon > 0$ assez petit

$$\forall \boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n, \quad |a_{\boldsymbol{d}}| \leqslant ||F||_{\rho^{-1+\varepsilon}}\ \rho^{(1-\varepsilon)|\boldsymbol{d}|}. \tag{2.1.4}$$

Par ailleurs un calcul immédiat montre qu'on a

$$\begin{aligned} &F(t_1,\dots,t_k,\rho^{-1},\dots,\rho^{-1}) - F(t_1,\dots,t_{k-1},\rho^{-1},\dots,\rho^{-1}) \\ &\quad = (\rho\, t_k - 1) \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^k,\,\delta\in\mathbf{N},\\ (\delta_j)_{k+1\leqslant j\leqslant n}\in\mathbf{N}^{n-k}}} a_{d_1,\dots,d_k+1+\delta,\delta_{k+1},\dots\delta_n}\, \rho^{-(\delta+1)-\sum\limits_{k+1\leqslant j\leqslant n}\delta_j} \prod_{1\leqslant i\leqslant k} t_i^{d_i}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Si on pose

$$\frac{F(t_1,\dots,t_k,\rho^{-1},\dots,\rho^{-1}) - F(t_1,\dots,t_{k-1},\rho^{-1},\dots,\rho^{-1})}{\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\rho\, t_i)} \overset{\text{déf}}{=} G_k(\boldsymbol{t}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n} b_{k,\boldsymbol{d}} \prod_{1\leqslant i\leqslant n} t_i^{d_i} \tag{2.1.6}$$

on a donc pour tout $\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n$ la relation

$$b_{k,\boldsymbol{d}} = -\sum_{\substack{0\leqslant\delta_i\leqslant d_i,\,1\leqslant i\leqslant k-1\\ \delta\in\mathbf{N},\\ \delta_j\in\mathbf{N},\,k+1\leqslant j\leqslant n}} a_{\delta_1,\dots,\delta_{k-1},d_k+1+\delta,\delta_{k+1},\dots\delta_n}\, \rho^{-(\delta+1)-\sum\limits_{k+1\leqslant j\leqslant n}\delta_j+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k-1}(d_i-\delta_i)+\sum\limits_{k+1\leqslant j\leqslant n} d_j}. \tag{2.1.7}$$

D'après (2.1.4), on a pour $\varepsilon > 0$ assez petit la majoration

$$|b_{k,\boldsymbol{d}}| \leqslant ||F||_{\rho^{-1+\varepsilon}}\ \rho^{-\varepsilon+(1-\varepsilon)\,d_k+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq k} d_i} \sum_{\substack{0\leqslant \delta_i\leqslant d_i,\, 1\leqslant i\leqslant k-1\\ \delta\in\mathbf{N},\\ \delta_j\in\mathbf{N},\, k+1\leqslant j\leqslant n}} \rho^{-\varepsilon(\delta_1+\cdots+\delta_{k-1}+\delta+\delta_{k+1}+\cdots+\delta_n)} \tag{2.1.8}$$

$$\leqslant \frac{||F||_{\rho^{-1+\varepsilon}}\ \rho^{-\varepsilon+(1-\varepsilon)\,d_k+\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq k} d_k}}{(1-\rho^{-\varepsilon})^n}. \tag{2.1.9}$$

Compte tenu de la relation

$$\frac{F(\boldsymbol{t})-F(\rho^{-1},\ldots,\rho^{-1})}{\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\rho\, t_i)} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} G_k(\boldsymbol{t}) \tag{2.1.10}$$

on obtient bien la majoration annoncée. □

Lemme 2.5. — *Soit N un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini, $\mathcal{C}$ un cône polyedral rationnel de dimension maximale de $N\otimes\mathbf{R}$, x_0 un élément de l'intérieur de $\mathcal{C}$ et x_1 un élément* non nul *de $\mathcal{C}$.*

1. *Pour tout réel $\rho > 1$ la série*
$$\sum_{y\in\mathcal{C}^\vee\cap N^\vee} \rho^{-\langle y\,,\,x_1\rangle}\, t^{\langle y\,,\,x_0\rangle} \tag{2.1.11}$$
est 1-*contrôlée à l'ordre* $\dim(\mathcal{C})-1$.
2. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels positifs. On suppose qu'il existe $\rho > 1$ tel que la série $\sum a_n\,\rho^{M_n}$ soit convergente.*
Alors la série
$$\sum a_n \sum_{\substack{y\in\mathcal{C}^\vee\cap N^\vee\\ \langle y\,,\,x_1\rangle\leqslant M_n}} t^{\langle y\,,\,x_0\rangle} \tag{2.1.12}$$
est 1-*contrôlée à l'ordre* $\dim(\mathcal{C})-1$.

Démonstration. — Soit Δ un éventail régulier de support $\mathcal{C}$. Pour tout cône δ de Δ, soit $\{y_\ell\}_{\ell\in\delta(1)}$ les générateurs des rayons de δ. Soit

$$\delta(1)_{x_1} \overset{\text{déf}}{=} \{\ell\in\delta(1),\quad \langle y_\ell\,,\,x_1\rangle = 0\}. \tag{2.1.13}$$

Comme x_1 est non nul, le cardinal de ce dernier ensemble est majoré par $\dim(\mathcal{C})-1$. Mais la série (2.1.12) se réécrit

$$\sum_{\delta\in\Delta}\left(\prod_{\ell\in\delta(1)_{x_1}} \frac{t^{\langle y_\ell\,,\,x_0\rangle}}{1-t^{\langle y_\ell\,,\,x_0\rangle}}\right)\sum_n a_n P_{\delta,n}(t) \tag{2.1.14}$$

où $P_{\delta,n}(t)$ vaut 1 si $M_n = 0$ et désigne sinon le polynôme

$$\sum_{\substack{(n_\ell)\in(\mathbf{N}_{>0})^{\delta(1)\setminus\delta(1)_{x_1}}\\ \sum n_\ell\,\langle y_\ell\,,\,x_1\rangle\leqslant M_n}} t^{\,\sum n_\ell\langle y_\ell\,,\,x_0\rangle}. \tag{2.1.15}$$

Dans ce dernier cas, on a a alors pour tout $\rho \geqslant 0$

$$P_{\delta,n}(\rho) \leqslant M_n^{\dim(\mathcal{C})}\,\rho^{\dim(\mathcal{C})\,\mathrm{Max}(\langle y_\ell\,,x_0\rangle)\,M_n}. \tag{2.1.16}$$

Ceci montre le deuxième point. Une décomposition analogue permet de montrer le premier point. □

La proposition suivante étend les résultats de la section 3.3 de [**Bou09**].

Proposition 2.6. — *Soit $n \geqslant 1$ un entier, soient $\{\mathcal{H}_j,\mathcal{H}'_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $\mathcal{H}$ des diviseurs de $\mathscr{C}$ tels que $\mathcal{H}$ et les $\mathcal{H}_j+\mathcal{H}'_j$ sont deux à deux linéairement équivalents. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, soit s_j une section globale non nulle de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}_j)$. On fixe des isomorphismes*

$$\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}_j+\mathcal{H}'_j) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}) \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{2.1.17}$$

ce qui permet de définir l'application linéaire

$$\varphi_{\boldsymbol{s}}\ :\ \prod_{1\leqslant j\leqslant n} H^0(\mathscr{C},\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}'_j)) \to H^0(\mathscr{C},\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})) \tag{2.1.18}$$

qui à (t_j) associe $\sum t_j\,s_j$. On note $\Delta_{\boldsymbol{s}}$ la dimension du noyau de $\varphi_{\boldsymbol{s}}$.

1. *On a la majoration*

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n-1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\deg(\mathcal{H}'_j). \tag{2.1.19}$$

2. *On a l'une des deux majorations suivantes :*

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n-1+\underset{1\leqslant j\leqslant n}{\deg}\left(\mathrm{Inf}[\mathrm{div}(s_j)]\right)-\deg(\mathcal{H})+\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\deg(\mathcal{H}'_j) \tag{2.1.20}$$

ou

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n-2+\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\deg(\mathcal{H}'_j). \tag{2.1.21}$$

3. *On suppose qu'on a*

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant n-1,\quad \deg(\mathcal{H}'_j)+\deg(\mathcal{H}'_{j+1}) \geqslant \deg(\mathcal{H})-\underset{1\leqslant j\leqslant n}{\deg}\left(\mathrm{Inf}[\mathrm{div}(s_j)]\right)+2\,g_{\mathscr{C}}-1. \tag{2.1.22}$$

Alors on a

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} = (n-1)\,(1-g_{\mathscr{C}})+\underset{1\leqslant j\leqslant n}{\deg}\left(\mathrm{Inf}[\mathrm{div}(s_j)]\right)-\deg(\mathcal{H})+\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\deg(\mathcal{H}'_j). \tag{2.1.23}$$

et l'image de $\varphi_{\boldsymbol{s}}$ est constituée de l'ensemble des multiples de $\mathrm{Inf}(\mathrm{div}(s_i))$.

Démonstration. — Commençons par la remarque élémentaire suivante : pour toute partie K de $\{1,\dots,n\}$, on a

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant \Delta_{(s_j)_{j\in K}}+\sum_{j\notin K}\ell(\mathcal{H}'_j) \leqslant \Delta_{(s_j)_{j\in K}}+n-|K|+\sum_{j\notin K}\deg(\mathcal{H}'_j) \tag{2.1.24}$$

Ceci entraîne déjà pour tout $j_0 \in \{1,\dots,n\}$ la majoration

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n-1+\sum_{j\neq j_0}\deg(\mathcal{H}'_j). \tag{2.1.25}$$

En moyennant sur tous les j_0, on obtient le premier point.

Montrons le deuxième point. Supposons que pour une certaine permutation des indices on ait

$$\deg(\mathcal{H}'_1 + \mathcal{H}'_2 - \mathcal{H} + \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_1), \operatorname{div}(s_2)]) \geqslant 0 \tag{2.1.26}$$

et

$$\forall k \geqslant 3, \quad \deg\left(\mathcal{H}'_k - \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j)]_{1 \leqslant j \leqslant k-1} + \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j)]_{1 \leqslant j \leqslant k}]\right) \geqslant 0. \tag{2.1.27}$$

D'après le point 2. du lemme 3.5 de [**Bou09**], on a la majoration

$$\Delta_{(s_1,s_2)} \leqslant 1 + \deg(\mathcal{H}'_1) + \deg(\mathcal{H}'_2) - \deg(\mathcal{H}) + \deg(\operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_1), \operatorname{div}(s_2)]). \tag{2.1.28}$$

Par ailleurs pour tout $k \geqslant 3$, on a

$$\Delta_{(s_1,s_2,\ldots,s_k)} \tag{2.1.29}$$
$$\leqslant \Delta_{(s_1,\ldots,s_{k-1})} + \ell\left(\mathcal{H}'_k - \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j)]_{1 \leqslant j \leqslant k-1} + \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j)]_{1 \leqslant j \leqslant k}\right) \tag{2.1.30}$$
$$\leqslant \Delta_{(s_1,\ldots,s_{k-1})} + 1 + \deg(\mathcal{H}'_k) - \deg(\operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j)]_{1 \leqslant j \leqslant k-1}) + \deg(\operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j)]_{1 \leqslant j \leqslant k}) \tag{2.1.31}$$

De proche en proche, on obtient la majoration (2.1.20).

Supposons à présent que tous les couples $(j_1, j_2) \in \{1, \ldots, n\}^2$ vérifient

$$\deg(\mathcal{H}'_{j_1} + \mathcal{H}'_{j_2} - \mathcal{H} + \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_{j_1}), \operatorname{div}(s_{j_2})]) < 0 \tag{2.1.32}$$

D'après le point 1. du lemme 3.5 de [**Bou09**], $\varphi_{s_{j_1}, s_{j_2}}$ est injective. On a donc

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n - 2 + \sum_{j \notin \{j_1, j_2\}} \deg(\mathcal{H}'_j). \tag{2.1.33}$$

En moyennant sur tous les couples (j_1, j_2), on obtient la majoration

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n - 2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \deg(\mathcal{H}'_j), \tag{2.1.34}$$

en particulier (2.1.21) est vérifiée.

Supposons enfin qu'il existe $n-1 \geqslant k \geqslant 2$ et une permutation des indices telle qu'on ait

$$\deg(\mathcal{H}'_1 + \mathcal{H}'_2 - \mathcal{H} + \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_1), \operatorname{div}(s_2)]) \geqslant 0 \tag{2.1.35}$$
$$\forall 3 \leqslant j \leqslant k, \quad \deg\left(\mathcal{H}'_k - \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j))_{1 \leqslant j \leqslant k-1} + \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_j)]_{1 \leqslant j \leqslant k}]\right) \geqslant 0 \tag{2.1.36}$$
$$\forall j_0 \geqslant k+1, \quad \deg\left(\mathcal{H}'_{j_0} - \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_1, \ldots, s_k)] + \operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_1, \ldots, s_k, s_{j_0})]\right) < 0 \tag{2.1.37}$$

Alors, pour tout $j_0 \geqslant k+1$, on a $\Delta_{(s_1,s_2,\ldots,s_k,s_{j_0})} = \Delta_{(s_1,\ldots,s_k)}$ et $\Delta_{\boldsymbol{s}}$ est majoré par

$$\Delta_{(s_1,\ldots,s_k)} + (n-k-1) + \sum_{j \geqslant k+1,\ j \neq j_0} \deg(\mathcal{H}'_j) \tag{2.1.38}$$

soit d'après ce qui précède par

$$k-1+\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \deg(\mathcal{H}'_j) - \deg(\mathcal{H}) + \deg(\operatorname*{Inf}_{1 \leqslant j \leqslant k}[\operatorname{div}(s_j)]) + (n-k-1) + \sum_{j \geqslant k+1,\ j \neq j_0} \deg(\mathcal{H}'_j). \tag{2.1.39}$$

En utilisant la majoration

$$\deg(\operatorname{Inf}[\operatorname{div}(s_1), \operatorname{div}(s_2), \ldots, \operatorname{div}(s_k)]) \leqslant \frac{1}{k} \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \deg(\mathcal{H}_j) \tag{2.1.40}$$

on aboutit finalement à la majoration

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n - 2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \deg(\mathcal{H}'_j) + \sum_{j \geqslant k+1,\ j \neq j_0} \deg(\mathcal{H}'_j) \tag{2.1.41}$$

En moyennant sur tous les $j_0 \geqslant k+1$, on obtient la majoration

$$\Delta_{\boldsymbol{s}} \leqslant n - 2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \deg(\mathcal{H}'_j) + \left(1 - \frac{1}{n-k}\right) \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant n} \deg(\mathcal{H}'_j). \tag{2.1.42}$$

Ainsi (2.1.21) est encore vérifiée dans ce cas. Ceci achève la démonstration du deuxième point.

Le dernier point est une généralisation immédiate (par récurrence) du point 3 de [**Bou09**, corollaire 3.6]. □

2.2. Décomposition de la fonction zêta des hauteurs. — Pour $K \subset J$, $\boldsymbol{\mathcal{D}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^I$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{I \cup J}$, on désigne par $\mathcal{N}_K(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ le cardinal de l'ensemble

$$\{(t_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(-\mathcal{G}_j + \sum_i a_{i,j}\,(\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i))) \tag{2.2.1}$$

vérifiant

$$\forall j \notin K, \quad t_j = 0 \tag{2.2.2}$$

et

$$\sum_{j \in J} t_j\, s_{\mathcal{G}_j} \prod_i (s_{\mathcal{D}_i}\, s_{\mathcal{F}_i})^{b_{i,j}} = 0, \tag{2.2.3}$$

et on pose

$$Z_K(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{I \cup J}} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\substack{y \in \operatorname{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,,\,\mathscr{G}_j \rangle \geqslant \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y\,,\,\mathscr{F}_i \rangle \geqslant \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \boldsymbol{\mathcal{D}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i) = \langle y\,,\,\mathscr{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I}} \mathcal{N}_K(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}})\, t^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X \rangle}. \tag{2.2.4}$$

On a donc d'après (1.2.10) la relation

$$Z_{X, -\mathscr{K}_X, X_0}(t) = \sum_{K \subset J} (-1)^{|J| - |K|} Z_K(t). \tag{2.2.5}$$

Proposition 2.7. — *Soit* $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^{I \cup J}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})^I$ *et* $y \in \operatorname{Pic}(X)^\vee \cap C_{\text{eff}}(X)^\vee$ *tels que pour* $i \in I$ *on ait* $\deg(\mathcal{D}_i) = \langle y\,,\,\mathscr{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i)$.

1. *Pour tout* $j_0 \in J$, *on a*

$$\log_q \mathcal{N}_{J \setminus \{j_0\}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{|J| - 1}\right) \sum_{j \neq j_0} (\langle y\,,\,\mathscr{G}_j \rangle - \deg(\mathcal{G}_j)) \tag{2.2.6}$$

2. La quantité $\log_q \mathcal{N}_J(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}})$ *est majorée soit par*

$$|J|-1+\left\langle y\,,\,-\mathscr{D}_{tot}+\sum_{j\in J}\mathscr{G}_j\right\rangle-\sum_{j\in J}\deg(\mathcal{G}_j)+\deg\left(\operatorname*{Inf}_{j\in J}(\sum_{i\in I}b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\mathcal{G}_j)\right) \tag{2.2.7}$$

soit par

$$1+\left(1-\frac{1}{|J|-1}\right)\sum_{j\in J}(\langle y\,,\,\mathscr{G}_j\rangle-\deg(\mathcal{G}_j)). \tag{2.2.8}$$

3. On suppose que pour une certaine numérotation de J*, on a*

$$\forall 1\leqslant j\leqslant |J|-1,\quad \langle y\,,\,\mathscr{G}_j+\mathscr{G}_{j+1}-\mathscr{D}_{tot}\rangle\geqslant\deg(\mathcal{G}_j)+\deg(\mathcal{G}_{j+1})+2\,g_{\mathscr{C}}-1. \tag{2.2.9}$$

Alors on a

$$\log_q \mathcal{N}_J(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}})=$$
$$(|J|-1)\,(1-g_{\mathscr{C}})+\left\langle y\,,\,-\mathscr{D}_{tot}+\sum_{j\in J}\mathscr{G}_j\right\rangle-\sum_{j\in J}\deg(\mathcal{G}_j)+\deg\left(\operatorname*{Inf}_{j\in J}(\sum_{i\in I}b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\mathcal{G}_j)\right). \tag{2.2.10}$$

Démonstration. — On applique la proposition 2.6 avec

$$\mathcal{H}'_j=-\mathcal{G}_j+\sum_{i\in I}a_{i,j}\,(\mathcal{D}_i+\mathcal{F}_i),\qquad \mathcal{H}_j=\mathcal{G}_j+\sum_{i\in I}b_{i,j}\,(\mathcal{D}_i+\mathcal{F}_i) \tag{2.2.11}$$

$$\text{et}\qquad s_j=s_{\mathcal{G}_j}\prod_{i\in I}(s_{\mathcal{D}_j}\,s_{\mathcal{F}_i})^{b_{i,j}}, \tag{2.2.12}$$

en notant qu'on a $\deg(\mathcal{H})=\langle y\,,\,\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\rangle$ et, pour $j\in J$, $\deg(\mathcal{H}'_j)=\langle y\,,\,\mathscr{G}_j\rangle-\deg(\mathcal{G}_j)$. □

Définition 2.8. — Un élément $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in(\mathbf{R}_{\geqslant 0})^{I\cup J}$ est dit μ_X-convergent si la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}|\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\,q^{-\sum f_i\deg(\mathcal{F}_i)-\sum g_j\deg(\mathcal{G}_j)} \tag{2.2.13}$$

est convergente.

Remarque 2.9. — On déduit du dernier point de la proposition 1.5 et de l'écriture de la série (2.2.13) sous forme de produit eulérien les propriétés suivantes :

1. pour tout $\varepsilon>0$, $(\frac{1}{2}+\varepsilon,\dots,\frac{1}{2}+\varepsilon)$ est μ_X-convergent ;
2. on suppose l'intersection des diviseurs $\{\mathscr{G}_j\}_{j\in J}$ non vide ; alors pour tout $\varepsilon>0$, $((1)_{i\in I},(\varepsilon)_{j\in J})$ est μ_X-convergent.

Lemme 2.10. — *Soit* $\mathscr{D}\in\mathrm{Pic}(X)$ *et* $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^J$*. On suppose qu'il existe* $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in(\mathbf{R}_{\geqslant 0})^{I\cup J}$ *vérifiant*

1. $((1+f_i),(g_j+\gamma_j))$ *est* μ_X*-convergent ;*

2. $-\mathscr{K}_X-\mathscr{D}-\sum\limits_{i\in I}(1+f_i)\mathscr{F}_i-\sum\limits_{j\in J}g_j\,\mathscr{G}_j\in C_{\mathrm{eff}}(X)\setminus\{0\}$.

Alors la série

$$Z(\mathscr{D},\boldsymbol{\gamma},t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\substack{y\in \mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant \deg(\mathcal{F}_i), \quad i\in I \\ \langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant \deg(\mathcal{G}_j), \quad j\in J \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i)=\langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i), \quad i\in I}} q^{\langle y\,,\mathscr{D}\rangle-\sum\limits_{j\in J}\gamma_j\,\deg(\mathcal{G}_j)}\, t^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.2.14}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$.

Démonstration. — D'après (1.1.1), elle est en effet majorée à une constante multiplicative près par la série

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})|$$
$$\times \sum_{\substack{y\in \mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant \deg(\mathcal{F}_i), \quad i\in I \\ \langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant \deg(\mathcal{G}_j), \quad j\in J}} q^{\langle y\,,\mathscr{D}\rangle \sum\limits_{j\in J} g_j\,(\langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle-\deg(\mathcal{G}_j))-\gamma_j\,\deg(\mathcal{G}_j)+\sum\limits_{i\in I}(1+f_i)(\langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i))}\, t^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.2.15}$$

elle-même majorée par

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\, q^{-\sum\limits_{i\in I}(1+f_i)\,\deg(\mathcal{F}_i)-\sum\limits_{j\in J}(g_j+\gamma_j)\deg(\mathcal{G}_j)}$$
$$\times \sum_{y\in \mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee} q^{\left\langle y\,,\mathscr{D}+\sum\limits_{i\in I}(1+f_i)\mathscr{F}_i+\sum\limits_{j\in J} g_j\mathscr{G}_j\right\rangle}\, t^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle}. \tag{2.2.16}$$

D'après les hypothèses et le lemme 2.5 cette dernière série est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$. □

Remarque 2.11. — Supposons que l'intersection des diviseurs $\{\mathscr{G}_j\}_{j\in J}$ est non vide. Soit $\mathscr{D}\in \mathrm{Pic}(X)$ et $\boldsymbol{\gamma}\in \mathbf{R}^J_{\geqslant 0}$. Notons $J_0 \overset{\text{déf}}{=} \{j\in J,\, \gamma_j=0\}$.

Supposons en outre que pour tout $\varepsilon>0$ assez petit on a

$$\sum_{j\in J_0\setminus J_1}(1-\varepsilon)\,\mathscr{G}_j+\sum_{j\notin J_0}(1-\gamma_j)\mathscr{G}_j-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}-\mathscr{D}\in C_{\mathrm{eff}}(X)\setminus\{0\}. \tag{2.2.17}$$

La remarque 2.9, la formule d'adjonction (2.0.13) et le lemme précédent montrent alors que la série $Z(\mathscr{D}+\sum\gamma_j\,\mathscr{G}_j,\boldsymbol{\gamma},t)$ est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$.

2.3. Le terme Z_J. — Pour $\boldsymbol{\mathcal{D}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I$, $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$ et $y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee$ on définit $\widetilde{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, y)$ par

$$\begin{aligned}&\log_q(\widetilde{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, y))\\ &\quad = \sum_j \langle y\,,\,\mathscr{G}_j\rangle - \langle y\,,\,\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\rangle - \sum_j \deg(\mathcal{G}_j) + \deg\left[\mathrm{Inf}_j\Big(\sum_i b_{i,j}(\mathcal{D}_i + \mathcal{F}_i) + \mathcal{G}_j\Big)\right].\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Posons

$$Z_{\mathrm{princ}}(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \langle y\,,\,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant\deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J\\ \langle y\,,\,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I\\ \boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\\ \deg(\mathcal{D}_i)=\langle y\,,\,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}} q^{(|J|-1)(1-g_{\mathscr{C}})}\, \widetilde{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, y)\, t^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.3.2}$$

et, pour $j_0, j_1 \in J$,

$$Z_{\mathrm{err},1,j_0,j_1}(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \langle y\,,\,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant\deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J\\ \langle y\,,\,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I\\ \left\langle y\,,\,\mathscr{G}_{j_0}+\mathscr{G}_{j_1}-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\right\rangle\leqslant\deg(\mathcal{G}_{j_0})+\deg(\mathcal{G}_{j_1})+2\,g_{\mathscr{C}}-2\\ \boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\\ \deg(\mathcal{D}_i)=\langle y\,,\,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}} q^{(|J|-1)(1-g_{\mathscr{C}})}\widetilde{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}, y)\, t^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.3.3}$$

$$\text{et}\quad Z_{\mathrm{err},2,j_0,j_1}(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \langle y\,,\,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant\deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J\\ \langle y\,,\,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I\\ \left\langle y\,,\,\mathscr{G}_{j_0}+\mathscr{G}_{j_1}-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\right\rangle\leqslant\deg(\mathcal{G}_{j_0})+\deg(\mathcal{G}_{j_1})+2\,g_{\mathscr{C}}-2\\ \boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\\ \deg(\mathcal{D}_i)=\langle y\,,\,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}} \mathcal{N}_J(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}})\, t^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle}. \tag{2.3.4}$$

Appliquant la proposition 2.7, on obtient le lemme suivant.

Lemme 2.12. — *Pour toute numérotation de J, la série $Z_J(t)-Z_{\mathrm{princ}}(t)$ est majorée par*

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant|J|-1} Z_{\mathrm{err},1,j,j+1}(t) + Z_{\mathrm{err},2,j,j+1}(t). \tag{2.3.5}$$

2.4. Le terme Z_{princ}. — Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^I$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$, posons

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{\boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I\\ \deg(\boldsymbol{\mathcal{D}})=\boldsymbol{d}}} q^{\deg(\mathrm{Inf}_j(\mathcal{G}_j+\sum_i b_{i,j}(\mathcal{D}_i+\mathcal{F}_i)))}. \tag{2.4.1}$$

Compte tenu de la relation (2.0.13) et de l'égalité $\dim(X)=|J|-1$, on a donc

$$q^{(g_{\mathscr{C}}-1)\dim(X)}Z_{\mathrm{princ}}(t)=$$
$$\sum_{\mathcal{E}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}\mu_X(\mathcal{E})\sum_{\substack{y\in \mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant \deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J\\ \langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant \deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}} q^{-\sum_j \deg(\mathcal{G}_j)-\sum_i\langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle}\,\mathcal{N}(\langle y_i\,,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i),\mathcal{E})\,(q\,t)^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.4.2}$$

2.4.1. Estimation de $\mathcal{N}(\boldsymbol{d},\mathcal{E})$. — Pour $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in \mathbf{N}^{I\cup J}$, on pose

$$F_{\rho,\boldsymbol{e}}(t)\overset{\text{déf}}{=}\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I}\rho^{\mathrm{Inf}_j\left(g_j+\sum_i b_{i,j}(d_i+f_i)\right)}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}\in k[[\rho,(t_i)_{i\in I}]], \tag{2.4.3}$$

$$\text{et}\quad \widetilde{F}_{\rho,\mathbf{e}}\overset{\text{déf}}{=}\left(\prod_{i\in I}1-t_i\right)F_{\rho,\mathbf{e}}\overset{\text{déf}}{=}\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I}P_{\mathbf{e},\boldsymbol{d}}(\rho)\,\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}, \tag{2.4.4}$$

où $P_{\mathbf{e},\boldsymbol{d}}(\rho)$ est un polynôme en ρ à coefficients entiers. Il découle aussitôt de (2.4.3) et (2.4.4) qu'on a $P_{\boldsymbol{e},0}=\rho^{\mathrm{Inf}_j\left(\sum_i b_{i,j}f_i+g_j\right)}$ et que pour tout $\boldsymbol{d}$, le polynôme $P_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}}(\rho)$ a au plus $|I|$ coefficients non nuls, qui sont tous majorés en valeur absolue par $|I|$.

Hypothèse 2.13. — *1. Pour tout $\eta>0$ assez petit, et pour tout $\mathbf{d}\neq 0$, on a*

$$(1-\eta)\;|\boldsymbol{d}|\geqslant 1+\eta+\deg(P_{0,\boldsymbol{d}})\quad ; \tag{2.4.5}$$

2. Pour $\mathbf{e}\in\{0,1\}^{I\cup J}$, on a une écriture

$$\widetilde{F}_{\rho,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t})=\left(1+\sum_{\boldsymbol{d}\neq 0}Q_{\mathbf{e},\boldsymbol{d}}(\rho)\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}\right)R_{\boldsymbol{e}}(\rho,\boldsymbol{t}) \tag{2.4.6}$$

où $Q_{\mathbf{e},\boldsymbol{d}}(\rho)$ est un polynôme en ρ et $R_{\mathbf{e}}$ un polynôme en ρ et $\mathbf{t}$; en outre, pour tout $\eta>0$ assez petit, et pour tout $\mathbf{d}\neq 0$, on a

$$(1-\eta)\;|\boldsymbol{d}|\geqslant 1+\eta+\deg(Q_{\mathbf{e},\boldsymbol{d}}). \tag{2.4.7}$$

Remarque 2.14. — La majoration (2.4.5) est vérifié dès qu'on a une écriture $\widetilde{F}_{\rho,0}(\boldsymbol{t})=\prod_{\alpha\in A}G_{\alpha,\rho}(\boldsymbol{t})^{\varepsilon_\alpha}$ avec A fini, $\varepsilon_\alpha\in\{-1,1\}$ et $G_{\alpha,\rho}(\boldsymbol{t})$ est un polynôme en $\boldsymbol{t}$ de terme constant 1 et pour lequel le coefficient de $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}$, pour $\boldsymbol{d}\neq 0$, est un polynôme en ρ de degré strictement inférieur à $|\boldsymbol{d}|-1$.

Remarque 2.15. — Si l'hypothèse 2.13 vaut, on vérifie aussitôt que pour tout $\eta>0$ assez petit, pour tout $v\in\mathscr{C}^{(0)}$ et tout $\boldsymbol{t}\in\mathbf{C}^I$ vérifiant $||\boldsymbol{t}||\leqslant q^{-1+\eta}$ on a

$$\left|\widetilde{F}_{q_v,0}(\boldsymbol{t})-1\right|=\mathcal{O}_\eta\left(q_v^{-1-\frac{1}{2}\eta}\right). \tag{2.4.8}$$

Il existe donc en particulier un ensemble $\mathscr{C}^{(0)}_\eta$ fini tel qu'on ait

$$\forall v\notin\mathscr{C}^{(0)}_\eta,\ \forall\boldsymbol{t}\in\mathbf{C}^I,\ \left(||\boldsymbol{t}||\leqslant q^{-1+\eta}\Rightarrow\left|\widetilde{F}_{q_v,0}(\boldsymbol{t})\right|\geqslant\frac{1}{2}\right). \tag{2.4.9}$$

Pour $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$, on considère à présent la série génératrice

$$Z_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{t}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I} \mathcal{N}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}})\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}} = \sum_{\boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I} q^{\deg(\mathrm{Inf}_j(\mathcal{G}_j+\sum_i b_{i,j}(\mathcal{D}_i+\mathcal{F}_i)))}\boldsymbol{t}^{\deg(\boldsymbol{\mathcal{D}})} \tag{2.4.10}$$

qui s'exprime donc comme le produit eulérien $\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} \frac{\widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\boldsymbol{t}^{f_v})}{\prod\limits_{i\in I}(1-t_i^{f_v})}$. On a la relation

$$\left(\prod_{i\in I} 1-q\,t_i\right) Z_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{t}) = \left(\prod_{i\in I}(1-q\,t_i)\,Z_{\mathscr{C}}(t_i)\right)\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} \widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\boldsymbol{t}^{f_v}), \tag{2.4.11}$$

où $Z_{\mathscr{C}}(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{D\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})} t^{\deg(D)}$ est la fonction zêta de Hasse-Weil de $\mathscr{C}$. Si on a $v(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \in \{0,1\}^{I\cup J}$ et si l'hypothèse 2.13 est vérifiée, la série $\left(\prod_{i\in I} 1-q\,t_i\right) Z_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{t})$ converge donc absolument sur un polydisque de rayon $(q^{-1+\eta},\dots,q^{-1+\eta})$ pour $\eta>0$ assez petit. Notons $\mathscr{C}^{(0)}_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ l'ensemble (fini) des $v\in\mathscr{C}^{(0)}$ tels que $v(\boldsymbol{\mathcal{E}})\neq 0$. Si $\eta>0$ est assez petit et si $\mathscr{C}^{(0)}_{\eta}$ est l'ensemble introduit à la remarque 2.15 on peut alors écrire

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{i\in I} 1-q\,t_i\right) Z_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{t})\\ &= \left(\prod_{i}(1-q\,t_i)\,Z_{\mathscr{C}}(t_i)\right)\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}\setminus\mathscr{C}^{(0)}_{\eta}} \widetilde{F}_{q_v,0}(\boldsymbol{t}) \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}_{\eta}} \widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\boldsymbol{t}) \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\setminus\mathscr{C}^{(0)}_{\eta}} \frac{\widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\boldsymbol{t})}{\widetilde{F}_{q_v,0}(\boldsymbol{t})}.\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Notation 2.16. — Si l'hypothèse 2.13 est vérifiée, pour tout $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$ tel que $v(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \in \{0,1\}^{I\cup J}$, on note

$$c_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{h_{\mathscr{C}}\,q^{1-g_{\mathscr{C}}}}{q-1}\right)^{|I|} \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} \widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{E}})}(q_v^{-1}) \tag{2.4.13}$$

et pour tout $\eta>0$ assez petit

$$c_{\eta,\boldsymbol{\mathcal{E}}} \overset{\text{déf}}{=} \left\|\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\setminus\mathscr{C}^{(0)}_{\eta}} \frac{\widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{E}})}(\boldsymbol{t})}{\widetilde{F}_{q_v,0}(\boldsymbol{t})}\right\|_{q^{-1+\eta}}. \tag{2.4.14}$$

De ce qui précède et du lemme 2.4 découle alors aussitôt la proposition suivante.

Proposition 2.17. — *On suppose l'hypothèse 2.13 vérifiée. Pour tout $\eta>0$ assez petit, il existe une constante C_η telle qu'on ait, pour tout $\boldsymbol{d}$ et tout $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$ vérifiant $v(\boldsymbol{\mathcal{E}}) \in \{0,1\}^{I\cup J}$, la majoration*

$$\left|\mathcal{N}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mathcal{E}}) - c_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})\,q^{\sum d_j}\right| \leqslant C_\eta . c_{\eta,\boldsymbol{\mathcal{E}}} \sum_{i\in I} q^{(1-\eta)d_i+\sum\limits_{i'\neq i} d_{i'}}. \tag{2.4.15}$$

Hypothèse 2.18. — *L'hypothèse 2.13 est vérifiée et pour tout $\eta > 0$ assez petit la série*

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\, c_{\eta,\boldsymbol{\mathcal{E}}}\, q^{-\sum\limits_{i\in I}(1-\eta)\deg(\mathcal{F}_i)-\sum\limits_{j\in J}\deg(\mathcal{G}_j)} \tag{2.4.16}$$

converge.

Remarque 2.19. — Supposons l'hypothèse 2.13 vérifiée. Pour $\boldsymbol{e} \in \{0,1\}^{I\cup J} \setminus \{(0,\ldots,0)\}$, écrivons

$$R_{\boldsymbol{e}}(\rho,\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{d}} R_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}}(\rho)\,\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}} \tag{2.4.17}$$

et notons $C_{\boldsymbol{e}}$ une constante vérifiant

$$\forall \boldsymbol{d}\in \mathbf{N}^I,\quad \deg(R_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}}) \leqslant |\boldsymbol{d}| + C_{\boldsymbol{e}}. \tag{2.4.18}$$

Il existe alors une constante M telle que pour $\eta > 0$ assez petit, le degré du polynôme $P_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}}(\rho)$ est majoré par $|\boldsymbol{d}|\,(1-\eta) + C_{\boldsymbol{e}} + \eta\, M$. Ceci entraîne l'existence d'une constante $C > 0$ telle qu'on ait pour tout $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et tout η assez petit la majoration $c_{\eta,\boldsymbol{\mathcal{E}}} \leqslant \prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}} C\, q_v^{C_v(\boldsymbol{\mathcal{E}})+2\,\eta\, M}$. Ainsi pour $\eta > 0$ assez petit la série (2.4.16) est majorée par le produit eulérien

$$\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}} 1 + C \sum_{\boldsymbol{e}\in\{0,1\}^{I\cup J},\, \boldsymbol{e}\neq 0} \left|\mu^0_X(\boldsymbol{e})\right| q_v^{C_{\boldsymbol{e}}+2\,\eta\, M-\sum_i (1-\eta)\, f_i-\sum_j g_j} \tag{2.4.19}$$

et l'hypothèse 2.18 sera satisfaite dès que la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \in \{0,1\}^{I\cup J}\setminus\{(0,\ldots,0)\},\quad \left(\mu^0_X(\boldsymbol{e}) \neq 0 \Rightarrow C_{\boldsymbol{e}} - \sum_i f_i - \sum_j g_j < -1\right). \tag{2.4.20}$$

2.4.2. Le terme Z_{princ}. — Si l'hypothèse 2.13 est vérifiée, posons

$$Z^0_{\mathrm{princ}}(t) \overset{\text{déf}}{=} q^{\dim(X)\,(1-g_{\mathscr{C}})} \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} \mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}}) c_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) q^{-\sum_i \deg(\mathcal{F}_i)-\sum_j \deg(\mathcal{G}_j)}$$
$$\times \sum_{\substack{y\in \mathrm{Pic}(X)^{\vee}\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^{\vee}\\ \langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle \geqslant \deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J\\ \langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}} (q\,t)^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.4.21}$$

Lemme 2.20. — *On suppose l'hypothèse 2.18 vérifiée. La série $Z_{\mathrm{princ}} - Z^0_{\mathrm{princ}}$ est alors q^{-1}-contrôlée à l'ordre* $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)) - 1$.

Démonstration. — Posons pour $i_0 \in I$ et $\eta > 0$ assez petit

$$Z_{\mathrm{princ},\eta,i_0}(t) \overset{\text{déf}}{=} C_\eta \sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\, c_{\eta,\boldsymbol{\mathcal{E}}} q^{\eta\,\deg(\mathcal{F}_{i_0})-\sum_i\deg(\mathcal{F}_i)-\sum_j\deg(\mathcal{G}_j)}$$
$$\times \sum_{y\in\mathrm{Pic}(X)^{\vee}\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^{\vee}} q^{-\eta\left\langle y\,,\mathscr{F}_{i_0}\right\rangle} (q\,t)^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.4.22}$$

D'après le lemme 2.5 et l'hypothèse 2.18, pour η assez petit, la série $Z_{\mathrm{princ},\eta,i}$ est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$ pour tout $i\in I$. Or d'après la proposition 2.17, la série $Z_{\mathrm{princ}}-Z^0_{\mathrm{princ}}$ est majorée par $\sum_{i\in I} Z_{\mathrm{princ},\eta,i}$. □

2.4.3. Le terme Z^0_{princ}. —

Hypothèse 2.21. — *On a pour tout $v\in\mathscr{C}^{(0)}$ la relation*

$$\sum_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in\{0,1\}^{I\cup J}}\mu^0_X(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})q_v^{-\sum f_i-\sum g_j}\widetilde{F}_{q_v,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}}(q_v^{-1}) \;=\; (1\;-\;q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(T_{NS}(X))}\frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}}. \tag{2.4.23}$$

Remarque 2.22. — On notera l'analogie avec la formule de [**Bou09**, Lemme 1.25].

Remarque 2.23. — Au moins dans le cas où pour tout $i\in I$ l'un au plus des $\{b_{i,j}\}_{j\in J}$ est non nul, il est facile de voir que les $F_{\rho,\boldsymbol{e}}(t)$ sont des fractions rationnelles effectivement calculables, ce qui peut alors permettre, pour un exemple donné dont on connaît l'anneau de Cox et les relations d'incidence des diviseurs $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{G}_j$, de confier aux soins d'un logiciel de calcul formel la vérification des hypothèses 2.13, 2.18 et 2.21.

Proposition 2.24. — *On suppose les hypothèses 2.13 et 2.21 satisfaites. Alors la série*

$$Z^0_{\mathrm{princ}}(t)-\gamma(X)\sum_{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee}(q\,t)^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.4.24}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$.

Démonstration. — Rappelons qu'on a

$$\gamma(X)=\left(\frac{h_{\mathscr{C}}\,q^{(1-g_{\mathscr{C}})}}{q-1}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}q^{(1-g_{\mathscr{C}})\,\dim(X)}\prod_{v\in\mathscr{C}^{(0)}}(1-q_v^{-1})^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}\frac{|X(\kappa_v)|}{q_v^{\dim(X)}}. \tag{2.4.25}$$

D'après le lemme 2.5 et la définition de Z^0_{princ}, la série

$$Z^0_{\mathrm{princ}}(t)-q^{\dim(X)\,(1-g_{\mathscr{C}})}\sum_{\mathcal{E}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}\mu_X(\mathcal{E})\,c_{\mathrm{pr}}(\mathcal{E})\,q^{-\sum_i\deg(\mathcal{F}_i)-\sum_j\deg(\mathcal{G}_j)}\times\sum_{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee}(q\,t)^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.4.26}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$. Or on a

$$\begin{aligned}
&q^{\dim(X)\,(1-g_{\mathscr{C}})}\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})\,c_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})\,q^{-\sum_i\deg(\mathcal{F}_i)-\sum_j\deg(\mathcal{G}_j)}\\
&=\left(\frac{h_{\mathscr{C}}\,q^{1-g_{\mathscr{C}}}}{q-1}\right)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))}q^{\dim(X)(1-g_{\mathscr{C}})}\\
&\quad\times\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})\left[\prod_v\widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{F}}),v(\boldsymbol{\mathcal{G}})}(q_v^{-1})\right]q^{-\sum_i\deg(\mathcal{F}_i)-\sum_j\deg(\mathcal{G}_j)}
\end{aligned}\tag{2.4.27}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})\left[\prod_v\widetilde{F}_{q_v,v(\boldsymbol{\mathcal{F}}),v(\boldsymbol{\mathcal{G}})}(q_v^{-1})\right]q^{-\sum_i\deg(\mathcal{F}_i)-\sum_j\deg(\mathcal{G}_j)}\\
&\qquad=\prod_v\sum_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in\{0,1\}^{I\cup J}}\mu_X^0(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})q_v^{-\sum_i f_i-\sum_j g_j}\widetilde{F}_{q_v,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}}(q_v^{-1})
\end{aligned}\tag{2.4.28}$$

L'hypothèse 2.21 donne alors le résultat. □

2.5. Les termes $Z_{\mathrm{err},1,j_0,j_1}$ et $Z_{\mathrm{err},2,j_0,j_1}$. —

2.5.1. Les termes $Z_{\mathrm{err},1,j_0,j_1}$. — Soit $j_0,j_1\in J$. On a pour $Z_{\mathrm{err},1,j_0,j_1}$ une expression semblable à (2.4.2), avec $|\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})|$ en lieu et place de $\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})$ et le deuxième domaine de sommation restreint aux y vérifiant

$$\langle y\,,\,\mathscr{G}_{j_0}+\mathscr{G}_{j_1}-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\rangle\leqslant\deg(\mathcal{G}_{j_0})+\deg(\mathcal{G}_{j_1})+2\,g_{\mathscr{C}}-2.\tag{2.5.1}$$

Par un raisonnement analogue à celui effectué pour Z^0_{princ}, on montre que si l'hypothèse 2.18 est satisfaite la série

$$\begin{aligned}
&Z_{\mathrm{err},1,j_0,j_1}(t)\\
&-q^{\dim(X)\,(1-g_{\mathscr{C}})}\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}}|\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})|\,c_{\mathrm{pr}}(\boldsymbol{\mathcal{E}})\,q^{-\sum_i\deg(\mathcal{F}_i)-\sum_j\deg(\mathcal{G}_j)}\sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee\\ \langle y\,,\,\mathscr{G}_{j_0}+\mathscr{G}_{j_1}-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\rangle\leqslant\deg(\mathcal{G}_{j_0})+\deg(\mathcal{G}_{j_1})+2\,g_{\mathscr{C}}-2}}(q\,t)^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X\rangle}
\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$. En utilisant le lemme 2.5, on obtient aussitôt ce qui suit.

Proposition 2.25. — *Soit $j_0,j_1\in J$ tels qu'on ait*

$$\mathscr{G}_{j_0}+\mathscr{G}_{j_1}-\mathscr{D}_{tot}\in C_{\mathrm{eff}}(X)\setminus\{0\}.\tag{2.5.3}$$

On suppose que l'hypothèse 2.18 est satisfaite. Alors $Z_{\mathrm{err},1,j_0,j_1}$ est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$

2.5.2. Les termes $Z_{\mathrm{err},2,j_0,j_1}$. — Soit $j_0, j_1 \in J$. En appliquant la proposition 2.7, on voit que $Z_{\mathrm{err},2,j_0,j_1}$ est majorée par la somme des deux séries

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant\deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J \\ \langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i)=\langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}} q^{|J|-2+(1-\frac{1}{|J|-1})\left(\left\langle y\,,\sum_j\mathscr{G}_j\right\rangle-\sum_j\deg(\mathcal{G}_j)\right)}\, t^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.5.4}$$

et

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\substack{y\in\mathrm{Pic}(X)^\vee\cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,,\mathscr{G}_j\rangle\geqslant\deg(\mathcal{G}_j),\quad j\in J \\ \langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle\geqslant\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I \\ \left\langle y\,,\mathscr{G}_{j_0}+\mathscr{G}_{j_1}-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\right\rangle\leqslant\deg(\mathcal{G}_{j_0})+\deg(\mathcal{G}_{j_1})+2\,g_{\mathscr{C}}-2 \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}\in\mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \deg(\mathcal{D}_i)=\langle y\,,\mathscr{F}_i\rangle-\deg(\mathcal{F}_i),\quad i\in I}} q^{|J|-2}\,\widetilde{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}},y)\,t^{\langle y\,,-\mathscr{K}_X\rangle} \tag{2.5.5}$$

Hypothèse 2.26. — *La série $Z((1-\frac{1}{|J|-1})\sum\mathscr{G}_j,(1-\frac{1}{|J|-1})_{j\in J},t)$ (cf. l'énoncé du lemme 2.10) est q^{-1}-contrôlée à l'ordre* $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$.

Remarque 2.27. — D'après le lemme 2.10 et la formule d'adjonction (2.0.13), l'hypothèse 2.26 est satisfaite dès qu'il existe $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in(\mathbf{R}_{\geqslant 0})^{I\cup J}$ tel que

$$((1+f_i)_{i\in I},\left(g_j+1-\frac{1}{|J|-1}\right)_{j\in J}) \tag{2.5.6}$$

est μ_X-convergent et

$$\sum_j\left(\frac{1}{|J|-1}-g_j\right)\mathscr{G}_j-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}-\sum_i f_i\mathscr{F}_i\in C_{\mathrm{eff}}(X)\setminus\{0\}. \tag{2.5.7}$$

Remarque 2.28. — Supposons que l'intersection des $\{\mathscr{G}_j\}_{j\in J}$ est non vide. D'après la remarque 2.11, l'hypothèse 2.26 est alors satisfaite dès qu'on a

$$\frac{1}{|J|-1}\sum_j\mathscr{G}_j-\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}\in C_{\mathrm{eff}}(X)\setminus\{0\}. \tag{2.5.8}$$

Proposition 2.29. — *Soit $j_0,j_1\in J$ tel qu'on ait*

$$\mathscr{G}_{j_0}+\mathscr{G}_{j_1}-\mathscr{D}_{tot}\in C_{\mathrm{eff}}(X)\setminus\{0\}. \tag{2.5.9}$$

On suppose que les hypothèse 2.18 et 2.26 sont satisfaites. Alors la série $Z_{\mathrm{err},2,j_0,j_1}$ est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$.

Démonstration. — En effet, sous l'hypothèse 2.18, le résultat est vérifié pour la série (2.5.5) (qui coïncide à une constante près avec $Z_{\mathrm{err},1,j_0,j_1}$) et sous l'hypothèse 2.26 il l'est pour la série (2.5.5). □

Afin d'appliquer les propositions 2.25 et 2.29, nous aurons besoin de l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.30. — *Il existe une numérotation de J telle qu'on ait*

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant |J|-1, \quad \mathscr{G}_j + \mathscr{G}_{j+1} - \mathscr{D}_{tot} \in C_{\mathrm{eff}}(X) \setminus \{0\}. \tag{2.5.10}$$

2.6. Les termes Z_K, avec $K \neq J$. —

Proposition 2.31. — *Soit $K \subset J$ avec $K \neq J$. On suppose que l'hypothèse 2.26 est satisfaite. Alors la série Z_K est q^{-1}-contrôlée à l'ordre* $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X)) - 1$.

Démonstration. — Si $K' \subset K$, il est immédiat que la série $Z_{K'}$ est majorée par Z_K. Il suffit donc de traiter le cas où K est égal à $J \setminus \{j_0\}$. La série considérée s'écrit pour mémoire

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\substack{y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,, \mathscr{G}_j \rangle \geqslant \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y\,, \mathscr{F}_i \rangle \geqslant \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \boldsymbol{\mathcal{D}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \deg(\boldsymbol{\mathcal{D}}) = (\langle y\,, \mathscr{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i))}} \mathcal{N}_{J \setminus \{j_0\}}(\boldsymbol{\mathcal{D}}, \boldsymbol{\mathcal{E}})\, t^{\langle y\,, -\mathscr{K}_X \rangle} \tag{2.6.1}$$

D'après la proposition 2.7, cette série est majorée à une constante près par

$$\sum_{\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I \cup J}} |\mu_X(\boldsymbol{\mathcal{E}})| \sum_{\substack{y \in \mathrm{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \\ \langle y\,, \mathscr{G}_j \rangle \geqslant \deg(\mathcal{G}_j), \quad j \in J \\ \langle y\,, \mathscr{F}_i \rangle \geqslant \deg(\mathcal{F}_i), \quad i \in I \\ \boldsymbol{\mathcal{D}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^I \\ \deg(\boldsymbol{\mathcal{D}}) = (\langle y\,, \mathscr{F}_i \rangle - \deg(\mathcal{F}_i))}} q^{\left(1 - \frac{1}{|J|-1}\right)\left(\sum\limits_{j \neq j_0} \langle y\,, \mathscr{G}_j \rangle - \deg(\mathcal{G}_j)\right)} t^{\langle y\,, -\mathscr{K}_X \rangle} \tag{2.6.2}$$

et donc par la série (2.5.4), pour laquelle le résultat est vérifié sous l'hypothèse 2.26. □

3. Construction d'une famille de quadrique intrinsèques et démonstration du résultat principal

Le but de cette section est de construire une famille de variétés justiciables de l'application de la méthode décrite dans la section précédente.

3.1. Une famille d'éventails projectifs et lisses. — Soit $\mathcal{I}$ un ensemble fini de cardinal supérieur à 3 et K un $\mathbf{Z}$-module libre de base $(\{\mathscr{F}_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \mathscr{F}_0)$. Pour $i \in \mathcal{I}$, on pose $\mathscr{G}_i \overset{\text{déf}}{=} -\mathscr{F}_i + \mathscr{F}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}} \mathscr{F}_j$. Soit $\pi\,:\, \mathbf{Z}^{(\mathcal{I} \times \{1,2\}) \cup \{0\}} \to M$ le morphisme qui envoie $e_{i,1}$ sur $\mathscr{F}_i$, $e_{i,2}$ sur $\mathscr{G}_i$ et e_0 sur $\mathscr{F}_0$. On considère la suite exacte de $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}^{(\mathcal{I} \times \{1,2\}) \cup \{0\}} \xrightarrow{\pi} K \to 0 \tag{3.1.1}$$

et la suite exacte duale

$$0 \to K^\vee \to \mathbf{Z}^{(\mathcal{I} \times \{1,2\}) \cup \{0\}} \xrightarrow{\iota^\vee} M^\vee \to 0. \tag{3.1.2}$$

Pour $i \in \mathcal{I}$ soit $g_i \overset{\text{déf}}{=} \iota^\vee(e_{i,2})$. Ainsi $\{g_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ est une base de $M^\vee$. On note $\{x_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ sa base duale. On note également $h \overset{\text{déf}}{=} \iota^\vee(e_0) = -\sum_{i\in\mathcal{I}} g_i$ et, pour tout $i \in \mathcal{I}$, $f_i \overset{\text{déf}}{=} \iota^\vee(e_{i,1}) = h + g_i$.

Proposition 3.1. — *Aux automorphismes induits par les permutations des éléments de la base $\{g_i\}$ près, il existe un unique éventail simplicial de $M^\vee$ dont l'ensemble des générateurs des rayons est $\{h\} \cup \{f_i\}_{i\in\mathcal{I}} \cup \{g_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Cet éventail est projectif et lisse.*

Si n est le cardinal de $\mathcal{I}$, cet éventail sera noté Σ_n. On utilisera dans ce qui suit le lemme élémentaire suivant :

Lemme 3.2. — *Soit $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}$. Alors le rang de la famille $\{(g_i)_{i\in\mathcal{I}_1}, (f_i)_{i\in\mathcal{I}_2}\}$ est $|\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2|$ si $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \varnothing$ et $1 + |\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2|$ sinon. En particulier cette famille est libre si et seulement si on a $|\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2| = 0$ ou 1.*

Pour toute partie A, on note $\mathcal{C}(A)$ le cône engendré par cette partie. Soit $\mathcal{C} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{g_i\}_{i\in\mathcal{I}}) = \cap_{i\in\mathcal{I}}\{x_i \geqslant 0\}$ et, pour $i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{C}_i \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{h\} \cup \{f_j\}_{j\neq i})$. On vérifie aussitôt que ces cônes sont simpliciaux et qu'on a, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\mathcal{C}_i = \{\sum_{j\neq i} x_j \leqslant (n-1)x_i\} \cap \bigcap_{j\neq i}\{x_j \geqslant x_i\}. \tag{3.1.3}$$

Pour $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$, on pose $\mathcal{C}_{\mathcal{J}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{C}(\{g_i, f_i\}_{i\in\mathcal{J}})$.

Proposition 3.3. — 1. *Soit $i \in \mathcal{I}$. On a*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}} = \{x_i \leqslant 0\} \cap \{\sum_{j\neq i} x_j \geqslant (n-2)x_i\} \cap \bigcap_{j\neq i}\{x_j \geqslant x_i\} \tag{3.1.4}$$

2. *Soit $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$. Les faces de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ sont les cônes $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{C}(\{g_i\}_{i\in\mathcal{K}})$ et $\mathcal{C}(\{f_i\}_{i\in\mathcal{K}})$, pour $\mathcal{K}$ décrivant les parties de $\mathcal{J}$.*
3. *Soit $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$ et $\{1, \ldots, |\mathcal{J}|\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}$ une numérotation de $\mathcal{J}$ (en d'autres termes un ordre total $\prec$ sur $\mathcal{J}$). Alors la famille*
$$\mathscr{F}_\prec \overset{\text{déf}}{=} \{\mathcal{C}(\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_{k+1}}, \ldots, g_{i_{|\mathcal{J}|}}\})\}_{1\leqslant k\leqslant|\mathcal{J}|} \tag{3.1.5}$$
est l'ensemble des cônes maximaux d'une subdivision simpliciale $\mathscr{S}_\prec$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. L'application $\prec \mapsto \mathscr{S}_\prec$ est une bijection de l'ensemble des ordres totaux sur $\mathcal{J}$ sur l'ensemble des subdivisions simpliciales de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.
4. *Soit $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$, $\prec$ un ordre total sur $\mathcal{J}$ et $\prec_{|\mathcal{K}}$ l'ordre induit sur $\mathcal{K}$. Alors la subdivision simpliciale induite par $\mathscr{S}_\prec$ sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ est $\mathscr{S}_{\prec_{|\mathcal{K}}}$.*
5. *La famille $\{\mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}}, \mathcal{C}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ est l'ensemble des cônes maximaux d'un éventail Σ de $M^\vee$, qui est l'éventail complet minimal dont un ensemble de générateurs des rayons est $\{h\} \cup \{g_i, f_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.*
6. *Soit $\prec$ un ordre total sur $\mathcal{I}$. La famille de cônes $\{\mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{C}_i\}_{i\in\mathcal{I}} \cup \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathscr{F}_{\prec_{|\mathcal{I}\setminus\{i\}}}$ est l'ensemble des cônes maximaux d'un éventail simplicial $\Sigma_\prec$ de $M^\vee$, qui raffine Σ. L'application $\prec \mapsto \Sigma_\prec$ est une bijection de l'ensemble des ordres totaux sur*

$\mathcal{I}$ sur l'ensemble des subdivisions simpliciales de Σ. Pour tout ordre total $\prec$ sur $\mathcal{I}$, l'éventail $\Sigma_{\prec}$ est projectif et lisse.

Démonstration. — On vérifie aussitôt l'inclusion

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}} \subset \{\sum_{j\neq i} x_j \leqslant (n-1)x_i\} \cap \bigcap_{j\neq i} \{x_j \geqslant x_i\}. \tag{3.1.6}$$

Réciproquement, soit x un élément du cône de droite. Il existe alors un $k \neq i$ tel qu'on ait $x_k \geqslant \frac{n-2}{n-1}\, x_i$, et on a

$$x = \left(x_k - \frac{n-2}{n-1} x_i\right) g_k + \sum_{j\neq k,i} (x_j - x_i)\, g_j - \frac{x_i}{n-1} \sum_{j\neq k,i} f_j \in \mathcal{C}\left(\{g_j, f_j\}_{j\neq i}\right). \tag{3.1.7}$$

Le point 1 est donc démontré.

On constate aussitôt les égalités

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}} \cap \{x_i = 0\} = \mathcal{C}\left(\{g_j\}_{j\neq i}\right) \tag{3.1.8}$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}} \cap \{\sum_{j\neq i} x_j = (n-1)x_i\} = \mathcal{C}\left(\{f_j\}_{j\neq i}\right) \tag{3.1.9}$$

$$\text{et} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}} \cap \{x_k = x_i\} = \mathcal{C}\left(\{g_j, f_j\}_{j\notin\{i,k\}}\right). \tag{3.1.10}$$

Ces cônes étant de dimension $|\mathcal{I}| - 1$ (les deux premiers sont simplicaux, pour le dernier cela découle du lemme 3.2), on obtient ainsi, toujours d'après le lemme 3.2, toutes les facettes de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}}$. Le point 2 en découle en utilisant une récurrence sur le cardinal de $\mathcal{I}$.

Soit $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$. Supposons d'abord que $\mathcal{J} = \{k, \ell\}$ avec $k \neq \ell$. D'après le point 2 les facettes de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ sont alors $\mathcal{C}(\{g_k, g_\ell\})$, $\mathcal{C}(\{f_k, f_\ell\})$, $\mathcal{C}(\{f_k, g_k\})$ et $\mathcal{C}(\{g_\ell, f_\ell\})$. Compte tenu du lemme 3.2, on en déduit aussitôt l'assertion dans ce cas-là. Passons au cas général. Soit $\mathscr{S}$ une subdivision simpliciale de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. D'après le lemme 3.2, tout cône maximal de $\mathscr{S}$ s'écrit $\mathcal{C}(\{f_k, g_\ell\}_{k\in\mathcal{J}_1, \ell\in\mathcal{J}_2})$ avec $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$ et $|\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2| = 1$. Comme $\mathcal{C}(\{g_i\}_{i\in\mathcal{J}})$ est une face de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, c'est également une face d'un cône maximal de $\mathscr{S}$. Un tel cône s'écrit nécessairement $\mathcal{C}(\{g_i\}_{i\in\mathcal{J}} \cup \{f_{i_0}\})$ pour un certain $i_0 \in \mathcal{J}$. Supposons avoir construit r éléments $i_0, i_1, \ldots, i_r$ de $\mathcal{J}$ tels que $\mathscr{S}$ contienne les cônes $\mathcal{C}\left(\{f_{i_0}, f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}, g_{i_k}\} \cup \{g_i\}_{i\in\mathcal{J}\setminus\{i_0,\ldots,i_k\}}\right)$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$. Si on a $r < |\mathcal{I}|$, le cône

$$\mathcal{C}\left(\{f_{i_0}, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}, g_{i_r}\} \cup \{g_i\}_{i\in\mathcal{J}\setminus\{i_0,\ldots,i_k\}}\right) \tag{3.1.11}$$

a pour face $\mathcal{C}\left(\{f_{i_0}, \ldots, f_{i_r}\} \cup \{g_i\}_{\mathcal{J}\setminus\{i_0,\ldots,i_r\}}\right)$, laquelle n'est incluse dans aucune des faces de $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$. Il existe donc un autre cône maximal de $\mathscr{S}$ ayant pour face le cône (3.1.11). Un tel cône maximal s'écrit donc soit

$$\mathcal{C}\left(\{f_{i_0}, \ldots, f_{i_r}, f_k\} \cup \{g_i\}_{i\in\mathcal{J}\setminus\{i_0,\ldots,i_r\}}\right) \tag{3.1.12}$$

pour un $k \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \ldots, i_r\}$, soit

$$\mathcal{C}\left(\{f_{i_0}, \ldots, f_{i_r}\} \cup \{g_i\}_{i\in\mathcal{J}\setminus\{i_0,\ldots,i_r\}} \cup \{g_k\}\right) \tag{3.1.13}$$

pour un $k \in \mathcal{J} \setminus \{i_0, \ldots, i_r\}$. Mais cette dernière possibilité est exclue, car elle entraînerait que les cônes $\mathcal{C}(\{g_k, f_k, f_{i_r}\})$ et $\mathcal{C}(\{g_{i_r}, f_k, f_{i_r}\})$ sont deux cônes d'une même subdivision simpliciale de $\mathcal{C}(\{g_k, g_{i_r}, f_k, f_{i_r}\})$, ce qui contredirait le résultat dans le cas $|\mathcal{J}| = 2$. De proche en proche, on construit donc une numérotation $i_0, \ldots, i_{|\mathcal{J}|}$ de $\mathcal{J}$ telle que les cônes

$$\left\{\mathcal{C}\left(\{f_{i_0}, f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_{k+1}}, \ldots, g_{i_{|\mathcal{J}|}}\}\right)\right\}_{1\leqslant k\leqslant |\mathcal{J}|} \tag{3.1.14}$$

sont des cônes maximaux de $\mathscr{S}$. Supposons que $\mathscr{S}$ contienne un cône maximal qui n'est pas dans cette liste : il existe alors $1 \leqslant \ell < k \leqslant n$ tel que ce cône ait pour face $\mathcal{C}(\{f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_\ell}\})$. Alors les cônes $\mathcal{C}(\{f_{i_k}, g_{i_k}, g_{i_\ell}\})$ et $\mathcal{C}(\{f_{i_\ell}, g_{i_\ell}, g_{i_k}\})$ sont deux cônes d'une même subdivision simpliciale de $\mathcal{C}(\{f_{i_k}, f_{i_\ell}, g_{i_k}, g_{i_\ell}\})$: contradiction. Compte tenu du fait qu'il existe au moins une subdivision simpliciale de $\mathcal{C}_K$ et de la symétrie du problème, le point 3 est démontré. Le point 4 est alors immédiat.

Démontrons le point 5. Montrons d'abord que les cônes considérés recouvrent $M^\vee \otimes \mathbf{R}$. Soit $x \in M^\vee \otimes \mathbf{R}$. Soit i tel que $x_i = \operatorname{Min}_{j\in\mathcal{I}}(x_j)$. Si on a $x_i \geqslant 0$, x est dans $\mathcal{C}$. Sinon, d'après (3.1.3) et le point 1, x est dans $\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}}$ ou $\mathcal{C}_i$ selon le signe de $\sum_{j\neq i} x_j - (n-1)x_i$.

Par ailleurs, pour tout i dans $\mathcal{I}$, l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ sépare $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}}$ d'une part, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_i$ d'autre part. Pour i, k éléments distincts de $\mathcal{I}$, l'hyperplan $\{x_i = x_k\}$ sépare respectivement $\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{k\}}$, $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_k$, $\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}}$ et $\mathcal{C}_k$. Enfin pour $i \in \mathcal{I}$, l'hyperplan $\{\sum_{j\neq i} x_j = (n-1)x_i\}$ sépare $\mathcal{C}_{\mathcal{I}\setminus\{i\}}$ et $\mathcal{C}_i$. Ceci achève la démonstration du point 5. Le point 6 découle alors des points 3 et 4, exception faite de la lissité de l'éventail $\Sigma_\prec$ qui se vérifie aussitôt et de sa projectivité. Il suffit de montrer cette dernière propriété pour un ordre total $\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n\}$, où n est le cardinal de $\mathcal{I}$. On considère les cônes réguliers de K obtenus par dualité de Gale (*cf.* [**BH04**, Section 3]) à partir des cônes maximaux de $\Sigma_\prec$:

$$\widetilde{\mathcal{C}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}\left(\{\mathscr{F}_i\}_{i\in\mathcal{I}}, \mathscr{F}_0\right) \tag{3.1.15}$$

$$\widetilde{\mathcal{C}_i} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}\left(\{\mathscr{G}_j\}_{j\in\mathcal{I}} \cup \mathscr{F}_i\}\right) \quad i \in \mathcal{I} \tag{3.1.16}$$

$$\text{et } \widetilde{\mathcal{C}_{i,j}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}\left(\{\mathscr{F}_i\}_{\substack{1\leqslant k\leqslant i-1\\ k\neq j}} \cup \{\mathscr{G}_k\}_{\substack{i+1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} \cup \{\mathscr{F}_j, \mathscr{G}_j, \mathscr{F}_0\}\right) \quad i, j \in \mathcal{I},\ i \neq j \tag{3.1.17}$$

D'après [**BH04**, Corollary 9.3], pour montrer que $\Sigma_\prec$ est projectif, il suffit de montrer que les intérieurs relatifs de ces cônes ont une intersection non vide. On détermine facilement les équations des intérieurs relatifs de ces cônes :

$$\operatorname{intrel}(\widetilde{\mathcal{C}}) = \bigcap_{0\leqslant i\leqslant n} \{y_i > 0\} \tag{3.1.18}$$

$$\operatorname{intrel}(\widetilde{\mathcal{C}_i}) = \{\sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_j > (n-1)\, y_0\} \bigcap \{\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} y_j > (n-2)\, y_0\} \bigcap_{\substack{0\leqslant j\leqslant n,\\ j\neq i}} \{y_j < z\} \tag{3.1.19}$$

$$\text{et } \operatorname{intrel}(\widetilde{\mathcal{C}_{i,j}}) = \bigcap_{\substack{1\leqslant k\leqslant i-1,\\ k\neq j}} \{y_i < y_k\} \bigcap_{\substack{i+1\leqslant k\leqslant n,\\ k\neq j}} \{y_i > y_k\}$$
$$\bigcap \{(n-2-i)\, y_i < \sum_{\substack{i+1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} y_k\} \bigcap \{(n-1-i)\, y_i < y_j + \sum_{\substack{i+1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} y_k\} \tag{3.1.20}$$

Soit $y_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, posons $y_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{n-1}{n}\, y_0 + (n-i)\,\varepsilon$. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit on vérifie que $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ est bien dans l'intersection de ces intérieurs relatifs. $\square$

3.2. Construction de variétés d'anneau de Cox donné. — Nous rappelons dans cette sous-section un résultat de l'article [**BH07**], dont nous suivrons autant que faire se peut les notations. Soit k un corps, $\mathfrak{I}$ un ensemble fini non vide et R un quotient de l'anneau de polynômes $k[u_i]_{i\in\mathfrak{I}}$. On suppose qu'on a $R^\times = k^\times$, que R est factoriel, fidèlement graduée par un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini K, et que les images $\bar{u_i}$ des u_i dans R sont des éléments K-homogènes premiers non deux à deux associés. On note $\mathfrak{F} \overset{\text{déf}}{=} \{\bar{u_i}\}_{i\in\mathfrak{I}}$. L'application $(e_i) \mapsto \deg(\bar{u_i})$ induit une suite exacte de $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}^{\mathfrak{I}} \xrightarrow{\pi} K \to 0. \tag{3.2.1}$$

On note γ le cône $\mathbf{R}_{\geqslant 0}^{\mathfrak{I}}$ et, pour $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}$, $\gamma_{\mathfrak{J}}$ la face de γ engendrée par les $\{e_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$; on identifiera dans la suite l'ensemble des faces du cône γ à l'ensemble des parties de $\mathfrak{I}$. Ainsi $(\mathbf{Z}^{\mathfrak{I}} \xrightarrow{\pi} K, \gamma)$ est le cône projeté associé au système de générateurs $\mathfrak{F}$ (au sens de [**BH07**, p.1212]). On suppose qu'il existe un éventail Σ de $M^\vee$ projectif et lisse dont les rayons sont les $\iota^\vee(e_i^\vee)$. Soit $\mathcal{P}_\Sigma$ l'ensemble des parties maximales $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{I}$ telles que $\iota^\vee(\sum_{i\in\mathfrak{J}} \mathbf{R}_{\geqslant 0} e_i^\vee)$ est un cône maximal de Σ. L'ensemble $\{\mathfrak{I} \setminus \mathfrak{J}\}_{\mathfrak{J}\in\mathcal{P}_\Sigma}$ forme alors la collection couvrante $\mathrm{Cov}(\Theta_\Sigma)$ d'une grappe Θ_Σ dans le cône projeté $(\mathbf{Z}^{\mathfrak{I}} \xrightarrow{\pi} K, \mathbf{R}_{\geqslant 0}^{\mathfrak{I}})$, au sens de [**BH07**, p. 1209]. La grappe Θ_Σ elle-même est l'ensemble des cônes minimaux parmi les $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J}\in\mathrm{Cov}(\Theta_\Sigma)}$. L'ensemble $\mathrm{Rlv}(\Theta_\Sigma)$ est l'ensemble des parties de $\mathfrak{I}$ contenant un élément de $\mathrm{Cov}(\Theta_\Sigma)$. Ainsi Θ_Σ est aussi l'ensemble des cônes minimaux parmi les $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J}\in\mathrm{Rlv}(\Theta_\Sigma)}$.

Pour $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}$, on pose $\mathbf{A}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{J}} \overset{\text{déf}}{=} \{(u_i) \in \mathbf{A}^{\mathfrak{I}}, \quad u_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in \mathfrak{J}\}$ et $\mathcal{Z}(\mathfrak{J}) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{A}^{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{J}} \cap \mathrm{Spec}(R)$. Une partie $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{I}$ est par définition une $\mathfrak{F}$-face si $\mathcal{Z}(\mathfrak{J})$ est non vide. L'ensemble des éléments de $\mathrm{Rlv}(\Theta_\Sigma)$ qui sont des $\mathfrak{F}$-face est l'ensemble $\mathrm{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma})$ des parties pertinentes d'une $\mathfrak{F}$-grappe $\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma}$ dans le cône projeté associé à $\mathfrak{F}$ étendue par Θ_Σ (au sens de [**BH07**, Definition 2.3 et Definition 3.3]). La $\mathfrak{F}$-grappe $\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma}$ elle-même est l'ensemble des cônes minimaux parmi les $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J}\in\mathrm{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma})}$. L'ensemble $\mathrm{Cov}(\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma})$ est l'ensemble des parties minimales de $\mathrm{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma})$. Ainsi la $\mathfrak{F}$-grappe $\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma}$ est l'ensemble des cônes minimaux parmi les $\{\pi(\gamma_{\mathfrak{J}})\}_{\mathfrak{J}\in\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma}}$. On notera qu'on a trivialement $\mathrm{Cov}(\Theta_\Sigma) \subset \mathrm{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma})$. On pose alors

$$\hat{X}_{\mathfrak{F},\Sigma} \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{\mathfrak{J}\in\mathrm{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma})} \mathcal{Z}(\mathfrak{J}) = \bigcup_{\mathfrak{J}\in\mathrm{Rlv}(\Theta_\Sigma)} \mathcal{Z}(\mathfrak{J}) \subset \mathbf{A}^{\mathfrak{I}}. \tag{3.2.2}$$

***Théorème 3.4* (Berchtold-Hausen).** — *On conserve les hypothèses et notations précédentes. On suppose que $\hat{X}_{\mathfrak{F},\Sigma}$ est lisse. Il existe alors une variété $X_{\mathfrak{F},\Sigma}$ projective et lisse, un isomorphisme* $\mathrm{Pic}(X_{\mathfrak{F},\Sigma}) \xrightarrow{\sim} K$ *et un isomorphisme* $\mathrm{Cox}(X_{\mathfrak{F},\Sigma}) \xrightarrow{\sim} R$ *compatibles aux graduations de* $\mathrm{Cox}(X_{\mathfrak{F},\Sigma})$ *et R par* $\mathrm{Pic}(X_{\mathfrak{F},\Sigma})$ *et K, respectivement. La variété $X_{\mathfrak{F},\Sigma}$ s'obtient comme le quotient géométrique de $\hat{X}_{\mathfrak{F},\Sigma}$ sous l'action naturelle du tore* $\mathrm{Hom}(K, \mathbf{G}_m)$.

Ceci découle de [**BH07**, Proposition 3.2, Theorem 4.2 et Proposition 5.6].

Remarque 3.5. — On conserve les notations précédentes. Pour $i \in \mathfrak{I}$, soit $\mathscr{E}_i$ le diviseur de $X_{\mathfrak{F},\Sigma}$ donné par l'annulation de la section u_i. Les relations d'incidence des diviseurs $\mathscr{E}_i$ se retrouvent aisément à partir des données ci-dessus. Plus précisément, pour toute partie $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{I}$, on a $\cap_{i\in\mathfrak{J}}\mathscr{E}_i \neq \varnothing$ si et seulement si il existe un élément de $\mathrm{Rlv}(\Phi_{\mathfrak{F},\Sigma})$ disjoint de $\mathfrak{J}$ si et seulement si il existe $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{K}$ tel $\iota^\vee(\sum_{i\in\mathfrak{K}}\mathbf{R}_{\geqslant 0}e_i^\vee)$ est un cône maximal de Σ et il existe $(u_i) \in \mathrm{Spec}(R)$ tel que $u_i = 0$ pour $i \in \mathfrak{J}$ et $\prod_{i\notin\mathfrak{K}} u_i \neq 0$

3.3. Le résultat principal. — On conserve les notations de la sous-section 3.2. Soit $n \geqslant 3$ un entier et soit $R_n \overset{\text{déf}}{=} k[\{s_i,t_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}, s_0]/\sum_{1\leqslant i\leqslant n} s_i\,t_i$. Soit $\mathfrak{F}_n$ l'ensemble des images des éléments $s_0, \{s_i,t_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans R_n. Soit K_n le **Z**-module libre de base $(\{\mathscr{F}_i\}_{0\leqslant i\leqslant n})$ On définit une K-graduation fidèle sur R en posant $\deg(s_0) = \mathscr{F}_0$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\deg(s_i) = \mathscr{F}_i$ et $\deg(t_i) = \mathscr{G}_i \overset{\text{déf}}{=} -\mathscr{F}_i + \mathscr{F}_0 + \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\mathscr{F}_j$. Soit X_n la variété $X_{\mathfrak{F}_n,\Sigma_n}$ où Σ_n est l'éventail de la proposition On vérifie aisément à partir de la description de Σ_n et de l'équation définissant R_n que la variété $\hat{X}_{\mathfrak{F}_n,\Sigma_n}$ est lisse. D'après le théorème 3.4, X_n est une variété projective et lisse d'anneau de Cox isomorphe à R_n et de groupe de Picard isomorphe à K_n, tel que le diviseur de s_i est $\mathscr{F}_i$ et le diviseur de t_i est $\mathscr{G}_i$. On notera que X_n est de dimension $n-1$.

Remarque 3.6. — On vérifie aisément, à partir de la remarque 3.5 que l'intersection $\cap_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{G}_i$ est non vide et que l'intersection $\cap_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{F}_i \cap \mathscr{G}_i$ est vide.

Remarque 3.7. — D'après [**Has04**], X_3 est isomorphe au plan projectif éclaté en trois points alignés, et est donc une compactification équivariante de l'espace affine $\mathbf{G}_a^2$. Plus généralement, X_n est une compactification équivariante de $\mathbf{G}_a^{n-1}$: munissons en effet $\mathbf{P}^{n-1}$ de coordonnées homogènes $(x_0 : \ldots : x_{n-1})$ et de l'action algébrique de $\mathbf{G}_a^{n-1}$ qui est l'action par translation sur $\{x_0 \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_a^{n-1}$ et est triviale sur $\{x_0 = 0\}$; on vérifie aisément que le morphisme

$$(s_0,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n) \mapsto (\prod_{0\leqslant i\leqslant n} s_i, s_1\,t_1,\ldots,s_n\,t_n) \tag{3.3.1}$$

induit par passage au quotient un morphisme $\pi_n : X_n \to \mathbf{P}^{n-1}$ (qui n'est autre que le morphisme défini par la base $\{\prod_{0\leqslant i\leqslant n} s_i, s_1\,t_1,\ldots,s_{n-1}\,t_{n-1}\}$ de $\mathscr{O}_{X_n}(\mathscr{F}_0+\cdots+\mathscr{F}_n)$) et que π_n induit un isomorphisme de $X_n \setminus \cup_{0\leqslant i\leqslant n}\mathscr{F}_i$ sur $\{x_0 \neq 0\}$; par ailleurs on vérifie que le morphisme

$$\begin{aligned}&(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\,(s_0,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n)\\ \mapsto\ &(s_0,\ldots,s_n,t_1+\lambda_1\prod_{i\neq 1}s_i,\ldots,t_{n-1}+\lambda_{n-1}\prod_{i\neq n-1}s_i,t_n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})\prod_{i\neq n}s_i)\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

induit une action de $\mathbf{G}_a^{n-1}$ sur X_n, pour laquelle le morphisme π_n est équivariant.

Théorème 3.8. — *On conserve les notations précédentes. Soit $n \geqslant 3$. Soit $Z_{X_n,-\mathscr{K}_{X_n},X_{n,0}}(t)$ la fonction zêta des hauteurs anticanonique associée à l'ouvert*

$X_{n,0} \overset{\text{déf}}{=} X_n \setminus \cup_{0\leqslant i\leqslant n} \mathscr{F}_i \cup_{1\leqslant i\leqslant n} \mathscr{G}_i$. *Alors la série*

$$Z_{X_n,-\mathscr{K}_{X_n},X_{n,0}}(t) - \gamma(X_n) \sum_{y\in C_{\text{eff}}(X_n)^\vee \cap \text{Pic}(X_n)^\vee} (q\,t)^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_{X_n}\rangle} \tag{3.3.3}$$

est q^{-1}*-contrôlée à l'ordre* $\text{rg}(\text{Pic}(X_n)) - 1$.

Démonstration. — On veut appliquer le théorème 2.2. Remarquons que $C_{\text{eff}}(X_n)$ est simplicial, engendré par la base $\{\mathscr{F}_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a

$$\mathscr{G}_i + \mathscr{G}_{i+1} - \mathscr{D}_{\text{tot}} = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\notin\{i,i+1\}}} \mathscr{F}_j \in C_{\text{eff}}(X_n) \setminus \{0\} \tag{3.3.4}$$

et donc l'hypothèse 2.30 vaut. Par ailleurs on a

$$\frac{1}{n-1} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathscr{G}_i - \mathscr{D}_{\text{tot}} = \frac{n}{n-1}\mathscr{F}_0 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathscr{F}_i - \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \mathscr{F}_i = \frac{1}{n-1}\mathscr{F}_0 \in C_{\text{eff}}(X_n)\setminus\{0\}. \tag{3.3.5}$$

D'après la remarque 2.28 et le fait que l'intersection des diviseurs $\{\mathscr{G}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ est non vide, l'hypothèse 2.26 est donc satisfaite.

Montrons à présent que l'hypothèse 2.18 est vérifiée. En reprenant les notations de la sous-section 2.4.1, on a ici

$$F_{\rho,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^{n+1}} \rho^{\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Inf}}\,(d_i+f_i+g_i)}\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}. \tag{3.3.6}$$

D'après [**Bou09**, Proposition 3.2], on a

$$\widetilde{F}_{\rho,0} = \frac{1 - \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} t_i}{1-\rho \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} t_i} \quad \text{et} \quad \widetilde{F}_{\rho,\boldsymbol{e}} = \frac{G_{\rho,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t})}{1-\rho\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} t_i} \tag{3.3.7}$$

où $G_{\rho,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) = \sum Q_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}}(\rho)\,\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}$ est un polynôme en $\boldsymbol{t}$ avec la propriété que le degré de $Q_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{d}}(\rho)$ est majoré par $\text{Min}(d_i + f_i + g_i)$. On en déduit en particulier que l'hypothèse 2.13 est satisfaite.

D'après le lemme 3.9 ci-dessous, on a pour tout $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \in \{0,1\}^{2\,n+1}$ et tout $\boldsymbol{d}$ la majoration

$$\text{Min}(d_i + f_i + g_i) \leqslant |\boldsymbol{d}| + \text{Min}(f_i + g_i). \tag{3.3.8}$$

D'après la remarque 2.19, il suffit pour vérifier l'hypothèse 2.18 de montrer que si $\boldsymbol{e} \in \{0,1\}^{2\,n+1}$ est non nul et tel que $\mu^0_{X_n}(\boldsymbol{e})$ est non nul alors on a

$$\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Min}}\,(f_i+g_i) - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(f_i+g_i) - f_0 \leqslant -2. \tag{3.3.9}$$

Mais comme on a $n \geqslant 3$, (3.3.9) est vérifiée sauf dans la situation suivante : tous les $f_i + g_i$ sont nuls (et dans ce cas $f_0 = 1$) sauf peut-être un qui vaut 1 (et dans ce cas $f_0 = 0$). D'après la proposition 1.5, cette situation entraîne que $\mu^0_{X_n}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ est nul. Ainsi l'hypothèse 2.18 est vérifiée.

Montrons finalement que l'hypothèse 2.21 est vérifiée. Pour $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \in \{0,1\}^{2\,n+1}$ posons, comme dans [**Bou09**],

$$\begin{aligned}\operatorname{fact}_{X_n,v}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) &\overset{\text{déf}}{=} q_v^{-\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n} f_i - \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} g_i}\,\widetilde{F}_{q_v,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}}(q_v^{-1})\\ &= (1-q_v^{-1})^n\, q_v^{-f_0} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n\\ d_i\geqslant f_i+g_i}} q_v^{\operatorname{Min}(d_i)}\, q_v^{-\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i}, \qquad (3.3.10)\end{aligned}$$

$$\kappa_v^{\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}} \overset{\text{déf}}{=} \{(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n},(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\kappa_v^{2\,n+1},\quad \forall i,\quad x_i=0 \text{ si } f_i=1 \text{ et } y_i=0 \text{ si } g_i=1\}, \qquad (3.3.11)$$

$$\text{et}\quad \operatorname{dens}_{X_n,v}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\left|\{((x_i)(y_i))\in\kappa_v^{\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}},\quad \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\,y_i=0\}\right|}{q_v^{2\,n}}. \qquad (3.3.12)$$

D'après [**Bou09**, Lemme 1.25], pour montrer que l'hypothèse 2.21 est vérifiée, il suffit de montrer la relation

$$\sum_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in\{0,1\}^{2\,n+1}} \mu^0_{X_n}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,\operatorname{fact}_{X_n,v}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \sum_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in\{0,1\}^{2\,n+1}} \mu^0_{X_n}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,\operatorname{dens}_{X_n,v}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}). \qquad (3.3.13)$$

Pour $f_0\in\{0,1\}$, on a d'après la remarque 3.6 et la proposition 1.5 la relation

$$\sum_{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in\{0,1\}^{2\,n}} \mu^0_{X_n}(f_0,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = 0. \qquad (3.3.14)$$

Pour montrer la relation (3.3.13), il suffit donc de montrer pour tout $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\in\{0,1\}^{2\,n}$ et tout $f_0\in\{0,1\}$ la relation

$$\begin{aligned}&\operatorname{fact}_{X_n,v}(f_0,f_1,\dots,f_n,\boldsymbol{g}) - \operatorname{fact}_{X_n,v}(f_0,1,\dots,1,1,\dots,1)\\ &\qquad = \operatorname{dens}_{X_n,v}(f_0,f_1,\dots,f_n,\boldsymbol{g}) - \operatorname{dens}_{X_n,v}(f_0,1,\dots,1,1,\dots,1) \qquad (3.3.15)\end{aligned}$$

et pour montrer cette dernière relation il suffit par symétrie de montrer qu'on a

$$\begin{aligned}&\operatorname{fact}_{X_n,v}(f_0,0,f_2,\dots,f_n,\boldsymbol{g}) - \operatorname{fact}_{X_n,v}(f_0,1,f_2\dots,f_n,\boldsymbol{g})\\ &\qquad = \operatorname{dens}_{X_n,v}(f_0,0,f_2,\dots,f_n,\boldsymbol{g}) - \operatorname{dens}_{X_n,v}(f_0,1,f_2\dots,f_n,\boldsymbol{g}) \qquad (3.3.16)\end{aligned}$$

Supposons $g_1=0$. Alors le membre de gauche de (3.3.16) vaut

$$(1-q_v^{-1})^n\,q_v^{-f_0} \sum_{\substack{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^{n-1}\\ d_i\geqslant f_i+g_i,\ 2\leqslant i\leqslant n}} q_v^{-\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant n} d_i} = (1-q_v^{-1})\,q_v^{-f_0-\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant n} f_i+g_i} \qquad (3.3.17)$$

tandis que le membre de droite vaut

$$q_v^{(1-f_0)-2\,n}\left|\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \kappa_v^{(0,f_2,\dots,f_n),(0,g_2,\dots,g_n)},\ x_1\neq 0,\sum x_i\,y_i=0\}\right| \tag{3.3.18}$$

$$= q_v^{1-f_0-2\,n}\,(q_v-1)\,\left|\kappa_v^{(f_2,\dots,f_n),(g_2,\dots,g_n)}\right| \tag{3.3.19}$$

$$= q_v^{-f_0-2\,(n-1)}\,(q_v^{-1}-1)\,q_v^{\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant n}(1-f_i+1-g_i)} \tag{3.3.20}$$

d'où l'égalité dans ce cas-là.

Supposons à présent qu'on a $g_1=1$. On peut également supposer qu'on a, pour un certain entier $2\leqslant k\leqslant n$, $f_i+g_i\geqslant 1$ pour $2\leqslant i\leqslant k$ et $f_i+g_i=0$ pour $i\geqslant k+1$. Commençons par la remarque suivante : posons pour $n\geqslant 1$

$$N_n(q_v)\overset{\text{déf}}{=}\left|\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\in\kappa_v^{2\,n},\quad \sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\,y_i=0\}\right| \tag{3.3.21}$$

On vérifie aussitôt la relation

$$N_n(q_v)=q_v\,N_{n-1}(q_v)+(q_v-1)\,q_v^{2\,n-2} \tag{3.3.22}$$

qui entraîne par une récurrence immédiate l'égalité

$$\sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^n} q_v^{\mathrm{Min}(1,n_i)}q_v^{-\sum n_i}=\frac{q_v^{-2\,n+1}}{(1-q_v^{-1})^n}\,N_n(q_v). \tag{3.3.23}$$

Le membre de gauche de (3.3.16) vaut alors

$$(1-q_v^{-1})^n\,q_v^{-f_0-1}\sum_{\substack{(d_2,\dots,d_n)\in\mathbf{N}^{n-1}\\ d_i\geqslant f_i+g_i}} q_v^{\mathrm{Min}(1,d_2,\dots,d_n)}\,q_v^{-\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}d_i} \tag{3.3.24}$$

$$= (1-q_v^{-1})^{n-k+1}\,q_v^{-f_0-1-\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant k}(f_i+g_i)}\sum_{(d_{k+1},\dots,d_n)\in\mathbf{N}^{n-k}} q_v^{\mathrm{Min}(1,d_{k+1},\dots,d_n)}\,q_v^{-\sum\limits_{k+1\leqslant i\leqslant n}d_i} \tag{3.3.25}$$

$$= (1-q_v^{-1})\,q_v^{-2\,(n-k)-f_0-\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant k}(f_i+g_i)}\,N_{n-k}(q_v) \tag{3.3.26}$$

et le membre de droite

$$q_v^{(1-f_0)-2\,n}\left|\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\kappa_v^{(0,f_2,\dots,f_n),(1,g_2,\dots,g_n)},\ x_1\neq 0,\sum_{k+1\leqslant i\leqslant n}x_i\,y_i=0\}\right|$$

$$= q_v^{1-f_0-2\,n}(q_v-1)\,q_v^{\sum\limits_{2\leqslant i\leqslant k}(1-f_i+1-g_i)}\,N_{n-k}(q_v) \tag{3.3.27}$$

d'où l'égalité dans ce cas également.

Ceci achève la démonstration du fait que l'hypothèse 2.21 est vérifiée pour la variété X_n, et donc la démonstration du théorème 3.8. $\square$

Lemme 3.9. — *Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^n$. On a pour tout $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^n$ la majoration*

$$\operatorname{Min}(d_i + \nu_i) \leqslant |\boldsymbol{d}| + \operatorname{Min}(\nu_i). \tag{3.3.28}$$

Démonstration. — On se ramène aussitôt au cas où $\operatorname{Min}(\nu_i) = 0$, $n = 2$, et $d_1 + \nu_1 = \operatorname{Min}(d_i + \nu_i)$. Si $\nu_1 = 0$ la majoration est évidemment vérifée. Sinon on a $\nu_2 = 0$ et $d_2 \geqslant d_1 + \nu_1$ et là encore la majoration est vérifiée. □

4. Application à une surface de del Pezzo généralisée

4.1. Une variante de la méthode précédente. — On considère à présent une légère variante de la situation considérée dans la section 2, en supposant cette fois qu'on a un isomorphisme

$$\operatorname{Cox}(X) \xrightarrow{\sim} k[(s_i)_{i \in I}, (t_j)_{j \in J}]/F(s_i, t_j) \tag{4.1.1}$$

où F est $\operatorname{Pic}(X)$-homogène de degré $\mathscr{D}_{\mathrm{tot}}$ et s'écrit

$$F = t_{j_0}^2 \prod_{i \in I} s_i^{b_{i,j_0}} + \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} t_j \prod_{i \in I} s_i^{b_{i,j}}, \quad b_{i,j} \in \mathbf{N}. \tag{4.1.2}$$

Par souci de simplification, on supposera en outre qu'on a $J = \{1, 2, 3\}$ (en d'autres termes que X est une surface). On choisira $j_0 = 1$. On reprend alors la stratégie développée dans la section 2 pour aboutir au résultat suivant, que nous appliquerons ensuite à une surface de del Pezzo généralisée issue de la liste établie par Derenthal dans [**Der06**].

Théorème 4.1. — *On conserve les notations et hypothèses précédentes. On suppose que les hypothèses 4.5 ci-dessous sont satisfaites. Alors la série*

$$Z_{X, -\mathscr{K}_X, X_0}(t) - \gamma(X) \sum_{y \in C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee \cap \operatorname{Pic}(X)^\vee} (q\,t)^{\langle y\,,\,-\mathscr{K}_X \rangle} \tag{4.1.3}$$

est q^{-1}-contrôlée à l'ordre $\operatorname{rg}(\operatorname{Pic}(X)) - 1$.

Corollaire 4.2. — *On suppose que X est la désingularisation minimale de la surface de del Pezzo singulière de degré* 6 *(respectivement* 5*) avec une singularité de type A_2 (respectivement de type A_3). Alors X vérifie la conclusion du théorème ci-dessus.*

La démonstration du théorème 4.1 est très similaire à celle du théorème 2.2 développée dans la section 2. Nous nous contentons d'indiquer succinctement les modifications nécessaires. Le lemme de comptage de sections globales (proposition 2.6) est remplacé par la proposition 4.3 ci-dessous. On déduit de cette nouvelle version la proposition 4.4, qui remplace la proposition 2.7. Compte tenu de cette nouvelle proposition, la série génératrice $F_{\rho,\boldsymbol{e}}$ définie par (2.4.3) s'écrit à présent

$$F_{\rho,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbf{N}^I} \rho^{\underset{2\leqslant j\leqslant 3}{\operatorname{Inf}}\left(g_j+\sum_i b_{i,j}(d_i+f_i)\right)-\lceil\frac{1}{2}\underset{2\leqslant j\leqslant 3}{\operatorname{Inf}}\left(g_j+\sum_i b_{i,j}(d_i+f_i)\right)-\frac{1}{2}\underset{1\leqslant j\leqslant 3}{\operatorname{Inf}}\left(\varepsilon_j\, g_j+\sum_i b_{i,j}(d_i+f_i)\right)\rceil} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}, \tag{4.1.4}$$

où $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, et, pour $x \in \mathbf{R}$, $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur à x. On aboutit alors naturellement à de nouvelles hypothèses suffisantes (hypothèses 4.5) pour mener à bien la méthode dans ce nouveau cadre.

Pour $\mathcal{D} \in \operatorname{Div}_{\text{eff}}(\mathscr{C})\otimes\mathbf{R}$ on note $\lceil\mathcal{D}\rceil \overset{\text{déf}}{=} \sum_v \lceil v(\mathcal{D})\rceil\, v$. Par une démarche semblable à celle utilisée dans la démonstration de la proposition 2.6, on aboutit au résultat suivant.

Proposition 4.3. — *Soient $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2$ et $\mathcal{H}'_3$ des diviseurs de $\mathscr{C}$ tels que les diviseurs $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1 + 2\,\mathcal{H}'_1$ et $\mathcal{H}_j + \mathcal{H}'_j$ pour $j = 2, 3$ sont deux à deux linéairement équivalents. Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, soit s_j une section globale non nulle de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}_j)$. On fixe des isomorphismes*

$$\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}_1 + 2\,\mathcal{H}'_1), \quad \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}_j + \mathcal{H}'_j), \quad j \in \{2, 3\} \tag{4.1.5}$$

ce qui permet pour $j \in \{2, 3\}$ de définir l'application

$$\varphi_{s_1,\{s_k\}_{2\leqslant k\leqslant j}} : H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}'_1)) \times \prod_{2\leqslant k\leqslant j} H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H}'_k)) \longrightarrow H^0(\mathscr{C}, \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathcal{H})) \tag{4.1.6}$$

qui à $(t_1, \{t_k\}_{2\leqslant k\leqslant j})$ associe $t_1^2\, s_1 + \sum_{2\leqslant k\leqslant j} t_k\, s_k$. On note

$$\Delta_{s_1,\{s_k\}_{2\leqslant k\leqslant j}} \overset{\text{déf}}{=} \log_q \left|\varphi^{-1}_{s_1,\{s_k\}_{2\leqslant k\leqslant j}}(\{0\})\right|. \tag{4.1.7}$$

1. *On a la majoration*

$$\Delta_{s_1,s_2} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\deg(\mathcal{H}'_1) + \frac{1}{2}\deg(\mathcal{H}'_2). \tag{4.1.8}$$

2. *La quantité Δ_{s_1,s_2,s_3} est majorée soit par*

$$1 + \deg(\mathcal{H}'_1), \tag{4.1.9}$$

soit par

$$2 + \sum_{1\leqslant j\leqslant 3} \deg(\mathcal{H}'_j) - \deg(\mathcal{H}) + \deg(\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_2), \operatorname{div}(s_3))) - \deg\left(\lceil\frac{1}{2}\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_2), \operatorname{div}(s_3)) - \frac{1}{2}\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_1), \operatorname{div}(s_2), \operatorname{div}(s_3))\rceil\right). \tag{4.1.10}$$

3. *On suppose qu'on a*

$$\deg(\mathcal{H}'_2) + \deg(\mathcal{H}'_3) \geqslant \deg(\mathcal{H}) - \deg(\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_2), \operatorname{div}(s_3))) + 2\, g_{\mathscr{C}} - 1 \tag{4.1.11}$$

et

$$\deg(\mathcal{H}'_1) \geqslant \deg\left(\lceil \frac{1}{2}\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_2),\operatorname{div}(s_3)) - \frac{1}{2}\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_1),\operatorname{div}(s_2),\operatorname{div}(s_3))\rceil\right) + 2\,g_{\mathscr{C}} - 1. \tag{4.1.12}$$

Notons que ceci est en particulier vérifié si l'on a

$$\deg(\mathcal{H}'_2) + \deg(\mathcal{H}'_3) - \deg(\mathcal{H}) \geqslant 2\,g_{\mathscr{C}} - 1 \tag{4.1.13}$$

$$\textit{et}\quad \deg(\mathcal{H}'_1) + \frac{1}{2}\deg(\mathcal{H}'_2) + \frac{1}{2}\deg(\mathcal{H}'_3) - \deg(\mathcal{H}) \geqslant 2\,g_{\mathscr{C}} - 1. \tag{4.1.14}$$

Alors $\Delta_{(s_1,s_2,s_3)}$ *vaut*

$$\begin{aligned} 2\,(1-g_{\mathscr{C}}) + \sum_{1\leqslant j\leqslant 3} \deg(\mathcal{H}'_j) - \deg(\mathcal{H}) + \deg(\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_2),\operatorname{div}(s_3))) \\ - \deg\left(\lceil \frac{1}{2}\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_2),\operatorname{div}(s_3)) - \frac{1}{2}\operatorname{Inf}(\operatorname{div}(s_1),\operatorname{div}(s_2),\operatorname{div}(s_3))\rceil\right). \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Proposition 4.4. — *Soit* $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \operatorname{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I\cup J}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}} \in \operatorname{Div}_{\mathrm{eff}}(\mathscr{C})^{I}$ *et* $y \in \operatorname{Pic}(X)^\vee \cap C_{\mathrm{eff}}(X)^\vee$ *tels que pour* $i \in I$ *on ait* $\deg(\mathcal{D}_i) = \langle y\,,\,\mathscr{F}_i\rangle - \deg(\mathcal{F}_i)$.

1. *Pour tout* $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, *on a*

$$\log_q \mathcal{N}_{\{1,2,3\}\setminus\{i\}}(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}}) \leqslant 1 + \frac{1}{2}\left(\langle y\,,\,\mathscr{G}_j\rangle - \deg(\mathcal{G}_j)\right) + \frac{1}{2}\left(\langle y\,,\,\mathscr{G}_k\rangle - \deg(\mathcal{G}_k)\right). \tag{4.1.16}$$

2. *Posons* $\varepsilon_1 = 2$ *et* $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. *La quantité* $\log_q \mathcal{N}_{\{1,2,3\}}(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}})$ *est majorée soit par*

$$1 + \langle y\,,\,\mathscr{G}_1\rangle - \deg(\mathcal{G}_1), \tag{4.1.17}$$

soit par

$$\begin{aligned} 2 + \left\langle y\,,\,\sum_{1\leqslant j\leqslant 3}\mathscr{G}_j - \mathscr{D}_{tot}\right\rangle - \sum_{1\leqslant j\leqslant 3}\deg(\mathcal{G}_j) + \deg\big(\operatorname*{Inf}_{2\leqslant j\leqslant 3}\big(\sum_{i\in I} b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\mathcal{G}_j\big)\big) \\ - \deg\left(\lceil \frac{1}{2}\operatorname*{Inf}_{2\leqslant j\leqslant 3}\big(\sum_{i\in I} b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\mathcal{G}_j\big) - \frac{1}{2}\operatorname*{Inf}_{1\leqslant j\leqslant 3}\big(\sum_{i\in I} b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\varepsilon_j\,\mathcal{G}_j\big)\rceil\right). \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

3. *On suppose qu'on a*

$$\langle y\,,\,\mathscr{G}_2+\mathscr{G}_3-\mathscr{D}_{tot}\rangle \geqslant \deg(\mathcal{G}_2) + \deg(\mathcal{G}_3) + 2\,g_{\mathscr{C}} - 1 \tag{4.1.19}$$

$$\textit{et}\quad \left\langle y\,,\,\mathscr{G}_1 + \frac{1}{2}\mathscr{G}_2 + \frac{1}{2}\mathscr{G}_3 - \mathscr{D}_{tot}\right\rangle \geqslant \deg(\mathcal{G}_1) + \frac{1}{2}\deg(\mathcal{G}_2) + \frac{1}{2}\deg(\mathcal{G}_3) + 2\,g_{\mathscr{C}} - 1. \tag{4.1.20}$$

Alors la quantité $\log_q \mathcal{N}_{\{1,2,3\}}(\boldsymbol{\mathcal{D}},\boldsymbol{\mathcal{E}})$ *vaut*

$$2\,(1-g_{\mathscr{C}})+\left\langle y\,,\sum_{j\in\{1,2,3\}}\mathscr{G}_j-\mathscr{D}_{tot}\right\rangle-\sum_{j\in\{1,2,3\}}\deg(\mathcal{G}_j)+\deg(\operatorname*{Inf}_{2\leqslant j\leqslant 3}(\sum_{i\in I}b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\mathcal{G}_j))$$
$$-\deg\left(\lceil\frac{1}{2}\operatorname*{Inf}_{2\leqslant j\leqslant 3}(\sum_{i\in I}b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\mathcal{G}_j)-\frac{1}{2}\operatorname*{Inf}_{1\leqslant j\leqslant 3}(\sum_{i\in I}b_{i,j}(\mathcal{F}_i+\mathcal{D}_i)+\varepsilon_j\,\mathcal{G}_j)\rceil\right). \tag{4.1.21}$$

Compte tenu de cette proposition, des hypothèses suffisantes pour mener à bien la méthode s'énoncent à présent ainsi.

Hypothèses 4.5. — *1. On a*

$$\mathscr{G}_2+\mathscr{G}_3-\mathscr{D}_{tot}\in C_{\text{eff}}(X)\setminus\{0\} \tag{4.1.22}$$

$$\textit{et}\quad \mathscr{G}_1+\frac{1}{2}\mathscr{G}_2+\frac{1}{2}\mathscr{G}_3-\mathscr{D}_{tot}\in C_{\text{eff}}(X)\setminus\{0\}. \tag{4.1.23}$$

2. *Pour* $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$*, la série* $Z(\frac{1}{2}\mathscr{G}_i+\frac{1}{2}\mathscr{G}_j,(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ *(cf. l'énoncé du lemme 2.10) est* q^{-1}*-contrôlée à l'ordre* $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$.
3. *La série* $Z(\mathscr{G}_1,(1,0,0))$ *est* q^{-1}*-contrôlée à l'ordre* $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(X))-1$.
4. *L'analogue des hypothèses 2.18 et 2.21 pour la nouvelle forme* (4.1.4) *de* $F_{\rho,\boldsymbol{e}}$ *est vérifié.*

Bien entendu, le point 2 sert à contrôler les termes d'erreur issus de la majoration (4.1.17) et le point 3 ceux issus de la majoration (4.1.16).

Remarque 4.6. — On suppose que l'intersection $\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2\cap\mathscr{G}_3$ est non vide. On déduit alors de la remarque (2.11) les faits suivants :

1. on suppose que pour $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ il existe $\varepsilon>0$ tel qu'on ait
$$(1-\varepsilon)\,\mathscr{G}_i+\frac{1}{2}\mathscr{G}_j+\frac{1}{2}\mathscr{G}_k-\mathscr{D}_{\text{tot}}\in C_{\text{eff}}(X)\setminus\{0\}\quad ; \tag{4.1.24}$$
alors le point 2 des hypothèses 4.5 est vérifié ;
2. on suppose qu'il existe $\varepsilon>0$ tel qu'on ait
$$(1-\varepsilon)\,\mathscr{G}_2+(1-\varepsilon)\,\mathscr{G}_3-\mathscr{D}_{\text{tot}}\in C_{\text{eff}}(X)\setminus\{0\}\quad ; \tag{4.1.25}$$
alors le point 3 des hypothèses 4.5 est vérifié.

Remarque 4.7. — Il est possible, à très peu de frais, d'améliorer très légèrement la proposition 4.3, ce qui conduit à affaiblir un peu les hypothèses ci-dessus. Une remarque similaire vaut pour la proposition 2.6. Nous ne donnons pas ces énoncés raffinés d'une part pour ne pas alourdir l'écriture, d'autre part car ils sont inutiles pour les applications proposées. Par exemple, la condition (4.1.14) peut-être affaiblie en demandant seulement l'existence d'un $\alpha\in[0,1]$ vérifiant

$$\deg(\mathcal{H}'_1)+\alpha\,\deg(\mathcal{H}'_2)+(1-\alpha)\,\deg(\mathcal{H}'_3)-\deg(\mathcal{H})\geqslant 2\,g_{\mathscr{C}}-1. \tag{4.1.26}$$

ce qui permet de remplacer la condition (4.1.23) par la condition affaiblie

$$\exists \alpha \in [0,1], \quad \mathscr{G}_1 + \alpha\,\mathscr{G}_2 + (1-\alpha)\,\mathscr{G}_3 - \mathscr{D}_{\mathrm{tot}} \in C_{\mathrm{eff}}(X) \setminus \{0\}. \tag{4.1.27}$$

4.2. Vérification des hypothèses dans le cas où X est la désingularisation de la surface de del Pezzo singulière de degré 6 avec singularité A_2. — D'après [**Der06**], on se trouve dans le cas de figure considéré au début de la section 4. Plus précisément, on a alors un isomorphisme

$$\mathrm{Cox}(X) \xrightarrow{\sim} k[(s_i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}, (t_j)_{1 \leqslant j \leqslant 3}]/s_1\,t_1^2 + s_2\,t_2 + s_3\,t_3 \tag{4.2.1}$$

et les relations

$$\mathscr{G}_1 = \mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_2 + \mathscr{F}_3, \tag{4.2.2}$$

$$\mathscr{G}_2 = 2\,\mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 + 2\,\mathscr{F}_3, \tag{4.2.3}$$

$$\text{et} \qquad \mathscr{G}_3 = 2\,\mathscr{F}_0 + \mathscr{F}_1 + 2\,\mathscr{F}_2 + \mathscr{F}_3. \tag{4.2.4}$$

Par ailleurs [**Der06**] décrit entièrement les relations d'incidence des diviseurs $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{G}_j$. En particulier on sait que l'intersection $\mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2 \cap \mathscr{G}_3$ est non vide.

La remarque 4.6 et un calcul immédiat montrent alors que les points 1, 2 et 3 des hypothèses 4.5 sont vérifiées.

Montrons à présent que les hypothèses 2.18 et 2.21 sont vérifiées. On a ici

$$F_{\rho,\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{t}) = G_{\rho,(f_1+2\,g_1, f_2+g_2, f_3+g_3)}(\boldsymbol{t}) \tag{4.2.5}$$

où, pour $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{N}^3$,

$$G_{\rho,\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{t}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{\{0,1,2,3\}}} \rho^{\mathrm{Min}(d_2+\nu_2, d_3+\nu_3) - \lceil \frac{1}{2}(\mathrm{Min}(d_2+\nu_2, d_3+\nu_3) - \mathrm{Min}(d_1+\nu_1, d_2+\nu_2, d_3+\nu_3)) \rceil}\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}. \tag{4.2.6}$$

Comme on l'a signalé dans la remarque 2.23, la vérification des hypothèses 2.18 et 2.21 peut être confiée à un logiciel de calcul formel. Nous expliquons cependant ci-dessous comment l'hypothèse 2.18 peut s'établir via un minimum de calcul. En ce qui concerne l'hypothèse 2.21, nous n'avons pas trouvé d'autre approche que le calcul par force brute.

Proposition 4.8. — *Posons*

$$\widetilde{G}_{\rho,\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{t}) \overset{\text{déf}}{=} (1-\rho\,t_2^2\,t_3^2)\,(1-\rho\,t_1\,t_2\,t_3) \prod_{0 \leqslant i \leqslant 3} (1-t_i)\, G_{\rho,\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{t}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^{\{1,2,3\}}} a_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{d}}(\rho)\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}. \tag{4.2.7}$$

Si l'une *des conditions*

$$d_1 \geqslant 5 + |\nu_2 - \nu_1| + |\nu_3 - \nu_1| \tag{4.2.8}$$

$$d_2 \geqslant 7 + |\nu_1 - \nu_2| + |\nu_3 - \nu_2| \tag{4.2.9}$$

$$d_3 \geqslant 7 + |\nu_1 - \nu_3| + |\nu_2 - \nu_3| \tag{4.2.10}$$

est satisfaite, $a_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{d}}(\rho)$ est nul. En particulier, $\widetilde{G}_{\nu,\rho}(\boldsymbol{t})$ est un polynôme.

Démonstration. — Pour $\boldsymbol{d} \in \mathbf{N}^3$, $\boldsymbol{\mu} \in \{0,1\}^3$ et $\boldsymbol{\gamma} \in \{0,1\}^2$ notons $\mathscr{P}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma})$ la condition

$$\left\{\begin{array}{llll} \mu_1+ & \gamma_1 & & \leqslant d_1 \\ \mu_2+ & \gamma_1+ & 2\,\gamma_2 & \leqslant d_2 \\ \mu_3+ & \gamma_1+ & 2\,\gamma_2 & \leqslant d_3 \end{array}\right. \tag{4.2.11}$$

et

$$\varphi(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu},\gamma_2) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Min}(d_2+\nu_2-\mu_2, d_3+\nu_3-\mu_3)$$
$$-\left\lceil\frac{1}{2}(\operatorname{Min}(d_2+\nu_2-\mu_2, d_3+\nu_3-\mu_3)-\operatorname{Min}(d_1+\nu_1-\mu_1, d_2+\nu_2-\mu_2-2\,\gamma_2, d_3+\nu_3-\mu_3-2\,\gamma_2))\right\rceil \tag{4.2.12}$$

Un calcul élémentaire montre que le coefficient $a_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{d}}(\rho)$ vaut

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\gamma}\in\{0,1\}^2,\,\boldsymbol{\mu}\in\{0,1\}^3\\ \mathscr{P}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma})}} (-1)^{\sum\gamma_i+\sum\mu_i}\rho^{\varphi(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu},\gamma_2)}. \tag{4.2.13}$$

Supposons qu'on ait $d_1 \geqslant 5+|\nu_2-\nu_1|+|\nu_1-\nu_3|$. En particulier la condition $\mathscr{P}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma})$ ne dépend plus de μ_1. Si on a en outre $d_2 \geqslant 4$ et $d_3 \geqslant 4$, la condition $\mathscr{P}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma})$ ne dépend plus de γ_1, et comme φ ne dépend pas non plus de γ_1, l'expression (4.2.13) montre aussitôt que $a_{\nu,\boldsymbol{d}}$ est nul. On peut donc supposer $d_2 \leqslant 3$. Mais alors l'hypothèse sur d_1 entraîne aussitôt qu'on a pour tout $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma}) \in \{0,1\}^5$

$$d_1+\nu_1-\mu_1 \geqslant d_2+\nu_2-\mu_2-2\,\gamma_2. \tag{4.2.14}$$

Ainsi $\varphi(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu},\gamma_2)$ ne dépend pas de μ_1, et l'expression (4.2.13) montre aussitôt que $a_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{d}}$ est nul. Les autres cas se traitent de manière similaire. $\square$

D'après (4.2.13) et (4.2.12), le degré en ρ de $a_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{d}}(\rho)$ est majoré par $\operatorname{Min}(\nu_2+d_2,\nu_3+d_3)$. Or, si (d_1,d_2,d_3) est non nul, on vérifie aussitôt que la majoration

$$\operatorname{Min}(d_2,d_3) < d_1+d_2+d_3-1 \tag{4.2.15}$$

vaut sauf si on a

$$(d_1,d_2,d_3) \in \{(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\} \tag{4.2.16}$$

et dans ce cas l'expression (4.2.13) montre facilement que $a_{0,\boldsymbol{d}}$ est nul. Ainsi l'hypothèse 2.13 est vérifiée.

Par ailleurs le lemme 3.9 montre qu'on a pour tout $\boldsymbol{\nu}$ et tout $\boldsymbol{d}$ la majoration

$$\deg(a_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{d}}(\rho)) \leqslant d_1+d_2+d_3+\operatorname{Min}(\nu_2,\nu_3). \tag{4.2.17}$$

Si $\boldsymbol{\nu}=(0,1,1)$, toujours d'après (4.2.13) et (4.2.12), on a

$$\deg(a_{(0,1,1),\boldsymbol{d}}(\rho)) \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Min}(d_2,d_3)+\frac{1}{2}\operatorname{Min}(d_1,d_2+1,d_3+1) \tag{4.2.18}$$

et donc la majoration ci-dessus peut-être améliorée en

$$\deg(a_{(0,1,1),\boldsymbol{d}}(\rho)) \leqslant d_1+d_2+d_3+\frac{1}{2}. \tag{4.2.19}$$

La remarque 2.19 et (4.2.17) montrent qu'il suffit pour vérifier l'hypothèse 2.18 d'établir que si $\boldsymbol{e} \in \{0,1\}^7$ est non nul et tel que $\mu_X^0(\boldsymbol{e})$ est non nul on a

$$-\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} g_j - \sum_{0\leqslant i\leqslant 3} f_i + \min(f_2+g_2, f_3+g_3) < -1. \tag{4.2.20}$$

On vérifie aussitôt que ceci vaut sauf dans le cas où $(f_0, f_1, g_1) = (0,0,0)$ et $(f_2 + g_2, f_3 + g_3) = (1,1)$. Mais alors (4.2.19) montre qu'il suffit en fait d'avoir

$$-\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} g_j - \sum_{0\leqslant i\leqslant 3} f_i + \frac{1}{2}\min(f_2+g_2, f_3+g_3) < -1. \tag{4.2.21}$$

Références

[BH04] Florian Berchtold and Jürgen Hausen, *Bunches of cones in the divisor class group— a new combinatorial language for toric varieties*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 6, 261–302. MR MR2041065 (2004m :14111)

[BH07] ———, *Cox rings and combinatorics*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 3, 1205–1252 (electronic). MR MR2262848 (2007h :14007)

[Bou09] David Bourqui, *Comptage de courbes sur le plan projectif éclaté en trois points alignés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 5, 1847–1895.

[CT02] Antoine Chambert-Loir and Yuri Tschinkel, *On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups*, Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 421–452.

[Der06] Ulrich Derenthal, *Singular Del Pezzo surfaces whose universal torsors are hypersurfaces*, `arXiv:math/0604194v1`, 2006.

[Has04] B. Hassett, *Equations of universal torsors and Cox rings*, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen : Seminars Summer Term 2004, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004, pp. 135–143. MR MR2183138 (2007a :14046)

[HK00] Yi Hu and Sean Keel, *Mori dream spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000), 331–348, Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. MR MR1786494 (2001i :14059)

[Pey95] Emmanuel Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), no. 1, 101–218. MR MR1340296 (96h :11062)

[Sal98] Per Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Astérisque (1998), no. 251, 91–258, Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996). MR MR1679841 (2000d :11091)

David Bourqui, I.R.M.A.R, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
E-mail : `david.bourqui@univ-rennes1.fr`